

2.3 第 6 讲 Berkovich 谱的基本性质

固定完备赋值域 $(K, |\cdot|)$ 和交换含么 Banach K -代数 $A \neq 0$. 这里允许阿基米德赋值, 也允许非阿基米德赋值, 包括平凡赋值. 回忆 A 上的范数 $\|\cdot\|$ 满足: $\|1_A\| = 1$, $\|cf\| = |c|\|f\|$, 三角不等式与次乘性, 且 A 关于此范数完备. 通过结构映射 $K \rightarrow A$, 把 $c1_A$ 仍记为 c ; 特别地, $\|c\| = |c|$. 同一底域上的其他 Banach 代数也采用这些约定.

2.3.1 Banach K -代数的 Berkovich 谱

当 $K = \mathbb{C}$ 取通常赋值时, Gelfand 谱以特征标 $\chi : A \rightarrow \mathbb{C}$ 为点. 取绝对值得到 $f \mapsto |\chi(f)|$, 它同时记录函数的零点与取值大小, 并满足 $|\chi(f)| \leq \|f\|$. 在一般的完备赋值域 K 上, 我们考虑的“特征标”类似物也是从 A 到某个域 L , 其中 L 作为 K -代数包含 K 作为子域. 有界的含么 K -代数同态 $\varphi : A \rightarrow L$ 给出实值函数 $f \mapsto |\varphi(f)|$. 这粗略地描述了从 Banach K -代数 A 出发定义的谱点. 下面我们给出严格的定义.

定义 2.23 (Berkovich 谱). A 上的乘法半范数是映射 $x : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f \mapsto |f|_x$, 且满足

$$|0|_x = 0, \quad |1|_x = 1, \quad |fg|_x = |f|_x |g|_x, \quad |f+g|_x \leq |f|_x + |g|_x.$$

若存在常数 $C_x > 0$, 使得 $|f|_x \leq C_x \|f\|$ 对所有 $f \in A$ 成立, 则称它有界.

A 的 Berkovich 谱 $\mathcal{M}(A)$ 是 A 上有界乘法半范数的集合, 并赋予使每个求值映射

$$\mathcal{M}(A) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto |f|_x \quad (f \in A)$$

连续的最弱拓扑.

半范数比范数宽松, 前者允许非零元取值为零. 我们接下来说明 A 上的有界乘性半范数 $|\cdot|_x$ 自动延拓 K 上赋值; 特别地, $|cf|_x = |c||f|_x$, 所以它与 K -代数的标量乘法相容.

命题 2.24 (有界性与压缩性). 乘法半范数 $|\cdot|_x$ 有界, 当且仅当对于任意 $f \in A$, 有

$$|f|_x \leq \|f\|.$$

在这种情形下, 映射 $f \mapsto |f|_x$ 关于 Banach 范数连续; 更精确地,

$$||f|_x - |g|_x| \leq |f - g|_x \leq \|f - g\|.$$

证明. 若 $|f|_x \leq C_x \|f\|$, 则对每个 $n \geq 1$, 乘法性与范数的次乘性给出

$$|f|_x^n = |f^n|_x \leq C_x \|f^n\| \leq C_x \|f\|^n.$$

取 n 次方根并令 $n \rightarrow \infty$, 得到 $|f|_x \leq \|f\|$. 反向蕴含只需取 $C_x = 1$. 由 $|f|_x \leq |f - g|_x + |g|_x$ 及交换 f, g 所得的不等式, 可得最后一式. $\square$

从 $|\cdot|_x$ 的有界性可知它自动延拓 K 上的赋值. 对 $c \in K^\times$, 命题 2.24 给出

$$|c|_x \leq \|c\| = |c|, \quad |c^{-1}|_x \leq |c|^{-1}, \quad |c|_x |c^{-1}|_x = 1.$$

这迫使等号取到 $|c|_x = |c|$.

2.3.2 非阿基米德底域上的超三角不等式

若 K 非阿基米德, A 的有界乘性半范数不仅延拓 K 上赋值, 还继承超三角不等式.

命题 2.25. 若 K 是非阿基米德赋值域, 则每个 $x \in \mathcal{M}(A)$ 都满足

$$|f + g|_x \leq \max\{|f|_x, |g|_x\} \quad (f, g \in A).$$

证明. 令 $M = \max\{|f|_x, |g|_x\}$. 当 $M = 0$ 时, 普通三角不等式已经给出结论. 若 $M > 0$, 则二项式公式、普通三角不等式及乘法性给出

$$|f + g|_x^n \leq \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}_K |f|_x^j |g|_x^{n-j} \leq (n+1)M^n.$$

非阿基米德赋值对每个整数的取值至多为 1, 故第二个不等式成立. 取 n 次方根并令 $n \rightarrow \infty$, 便得到 $|f + g|_x \leq M$. $\square$

2.3.3 支撑、完备剩余域与谱映射

命题 2.26. 对谱点 $x \in \mathcal{M}(A)$, 令 $\mathfrak{p}_x = \text{supp}(x) = \{f \in A : |f|_x = 0\}$. 则 $\mathfrak{p}_x$ 是关于 Banach 范数为闭的素理想, 而且如下方式定义的支撑映射

$$\text{supp} : \mathcal{M}(A) \rightarrow \text{Spec } A, \quad x \mapsto \mathfrak{p}_x$$

是连续映射.

证明. 由 $|-1|_x^2 = |1|_x = 1$ 知 $|-1|_x = 1$, 故 $|-f|_x = |f|_x$. 由普通三角不等式, $\mathfrak{p}_x$ 对加法封闭; 显然它吸收 A 的乘法. 又因 $|1|_x = 1$, 它是真理想. 若 $fg \in \mathfrak{p}_x$, 则 $|f|_x |g|_x = 0$, 所以 $f \in \mathfrak{p}_x$ 或 $g \in \mathfrak{p}_x$. 因此 $\mathfrak{p}_x$ 是素理想. 连续性命题 2.24 说明它还是闭理想.

证明支撑映射连续. 对任意理想 $I \subseteq A$ 与 $f \in A$, 按定义展开即得

$$\text{supp}^{-1}(V_A(I)) = \bigcap_{g \in I} \{x : |g|_x = 0\}, \quad \text{supp}^{-1}(D_A(f)) = \{x : |f|_x > 0\}.$$

每个求值映射 $x \mapsto |g|_x$ 连续, 故右端分别是闭集与开集, 支撑映射因此连续. $\square$

支撑映射把 Berkovich 谱点对应到某个素理想, 但它未必是一一映射. 例如, 在一元 Tate 代数的 Berkovich 谱 $\mathcal{M}(K\langle T \rangle)$ 中, 正半径的“圆盘点”的支撑都是 (0) , 因此支撑为零理想的谱点不仅不唯一, 而且有很多. 我们后文会详细介绍这个案例.

类似于素谱点的剩余域, 每个 Berkovich 谱点给出剩余域, 但额外带有赋值且完备.

命题 2.27. 设 $x \in \mathcal{M}(A)$, 记 $\mathfrak{p}_x = \text{supp}(x)$. 半范数 $|\cdot|_x$ 在 $A/\mathfrak{p}_x$ 上诱导乘法范数, 按

$$\left| \frac{\bar{f}}{\bar{g}} \right|_x = \frac{|f|_x}{|g|_x} \quad (g \notin \mathfrak{p}_x)$$

唯一延拓到分式域 $\text{Frac}(A/\mathfrak{p}_x)$. 其完备化记为 $\mathcal{H}(x)$, 称为 x 的完备剩余域. 我们有等距嵌入 $K \hookrightarrow \mathcal{H}(x)$. 自然的 K -代数同态 $A \rightarrow \mathcal{H}(x)$, $f \mapsto f(x)$ 的核为 $\mathfrak{p}_x$, 并满足

$$|f(x)| = |f|_x \leq \|f\|.$$

证明. 若 $f - f' \in \mathfrak{p}_x$, 则 $|f|_x \leq |f - f'|_x + |f'|_x = |f'|_x$, 交换 f, f' 即得 $|f|_x = |f'|_x$, 所以商环上的范数定义良好. 分式域上的公式与表示无关, 因为 $\bar{f}\bar{g}' = \bar{f}'\bar{g}$ 蕴含 $|f|_x|g'|_x = |f'|_x|g|_x$. 其余公理及唯一性随即由乘法性与通分得到.

记 $F = \text{Frac}(A/\mathfrak{p}_x)$. 环运算与乘法范数延拓到完备化 $\widehat{F}$. 若 $0 \neq u \in \widehat{F}$, 取 $u_n \in F$ 趋于 u , 则 $|u_n|_x$ 最终远离零, 且 $|u_n^{-1} - u_m^{-1}|_x = |u_n - u_m|_x / (|u_n|_x|u_m|_x) \rightarrow 0$. 因此逆元列有极限, 与 u 相乘为 1, 故 $\widehat{F} = \mathcal{H}(x)$ 仍是赋值域. 对 $c \in K^\times$, $|c|_x = |c| > 0$, 故 $\mathfrak{p}_x \cap K = (0)$; 于是 K 嵌入上述分式域及其完备化, 且诱导赋值在 K 上就是原赋值.

自然映射 $A \rightarrow A/\mathfrak{p}_x \hookrightarrow F \hookrightarrow \mathcal{H}(x)$ 的核为 $\mathfrak{p}_x$, 并保持 $|\cdot|_x$ 的取值; 再用命题 2.24 即得 $|f(x)| = |f|_x \leq \|f\|$. $\square$

因此一个 Berkovich 点包含两层信息: 素理想 $\mathfrak{p}_x$ 记录哪些函数在 x 处消失, 完备剩余域 $\mathcal{H}(x)$ 上的实值赋值记录函数取值的大小. 正如环同态诱导素谱连续映射, Banach K -代数之间的有界同态诱导 Berkovich 谱的连续映射, 且和谱映射相容.

命题 2.28. 设 B 也是交换 Banach K -代数, $\varphi : A \rightarrow B$ 是非零有界 K -代数同态, 即存在 $C > 0$ 使 $\|\varphi(f)\|_B \leq C\|f\|_A$. 则半范数复合 K -代数同态 φ 诱导的映射

$$\varphi^* : \mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A), \quad |\cdot|_x \mapsto |\varphi(\cdot)|_x$$

是连续映射,并满足

$$\text{supp}(\varphi^*x) = \varphi^{-1}(\text{supp}(x)).$$

证明. 固定 $x \in \mathcal{M}(B)$. 因为 φ 是保持么元的 K -代数同态, 映射 $f \mapsto |\varphi(f)|_x$ 满足乘法半范数的四条公理, 且 $|\varphi(c)|_x = |c|_x = |c|$ 对每个 $c \in K$ 成立. 又由命题 2.24, $|b|_x \leq \|b\|_B$ 对所有 $b \in B$ 成立, 故

$$|\varphi(f)|_x \leq \|\varphi(f)\|_B \leq C\|f\|_A \quad (f \in A).$$

因此复合半范数有界, φ^*x 的确属于 $\mathcal{M}(A)$.

以下验证连续性. 对 $f \in A$, 分别记 A, B 上的求值映射为 $\text{ev}_f^A(z) = |f|_z$ 与 $\text{ev}_{\varphi(f)}^B(y) = |\varphi(f)|_y$. 按照 Berkovich 谱拓扑的定义, 当 f 遍历 A , V 遍历 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 的开集时, 集合 $(\text{ev}_f^A)^{-1}(V)$ 构成 $\mathcal{M}(A)$ 的一个子基. 每个子基开集的原像为

$$(\varphi^*)^{-1}((\text{ev}_f^A)^{-1}(V)) = \{y \in \mathcal{M}(B) : |\varphi(f)|_y \in V\} = (\text{ev}_{\varphi(f)}^B)^{-1}(V).$$

右端依 $\mathcal{M}(B)$ 的拓扑定义为开集, 所以每个子基开集的原像都是开集, 从而 φ^* 连续. 最后, 对任意 $f \in A$, 有 $f \in \text{supp}(\varphi^*x)$ 当且仅当 $|\varphi(f)|_x = 0$, 也即 $\varphi(f) \in \text{supp}(x)$. 这便给出所述支撑公式. $\square$

上述命题里的有界性不能替代成连续性, 如下例所示.

例(连续不一定有界). 设 $K = k$ 带平凡赋值, 即每个非零元素的赋值均为 1. 其赋值拓扑离散, 所以 k 完备. 固定 $0 < R < 1$, 令 $A = k[[T]]$ 为形式幂级数环, 其中每个元素为无穷级数 $f(T) = \sum_{n \geq 0} a_n T^n$ 且系数 $a_n \in k$. 对非零级数 f , 记 $\nu(f)$ 为最低非零项的次数, 并约定 $\nu(0) = +\infty$. 由级数的加法与乘法, 有 $\nu(f+g) \geq \min\{\nu(f), \nu(g)\}$ 及 $\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g)$. 因而 $\|f\| = R^{\nu(f)}$ 给出乘法范数, 其中 $R^{+\infty} = 0$; 它满足超三角不等式, 且延拓 k 的赋值. 这个范数使 A 完备: 若 (f_m) 是 Cauchy 列, 则对每个整数 $N \geq 0$, 当 m, n 足够大时有 $\|f_m - f_n\| < R^N$, 即 $\nu(f_m - f_n) > N$, 所以 f_m 的前 $N+1$ 个系数最终稳定. 将各个次数的稳定系数组成级数 f , 便有 $\|f_m - f\| \leq R^{N+1}$ 对充分大的 m 成立. 由于 $R^{N+1} \rightarrow 0$, 得到 $f_m \rightarrow f$. 因此 $(A, \|\cdot\|)$ 是 Banach k -代数.

对任意 $0 < r < 1$, 同样令 $|f|_{x_r} = r^{\nu(f)}$, 其中 $r^{+\infty} = 0$. 类似上述关于 ν 的论证仍说明这是乘法范数. 对 $c \in k^\times$, $\nu(c) = 0$, 故 $|c|_{x_r} = 1 = |c|$; 改变 r 并未改变底域赋值. 设 $\alpha = \log r / \log R > 0$, 则 $|f|_{x_r} = \|f\|^\alpha$. 由范数的三角不等式, 对任意 $f, g \in A$, 有

$$||f|_{x_r} - |g|_{x_r}| \leq |f - g|_{x_r} = \|f - g\|^\alpha.$$

右端在 $g \rightarrow f$ 时趋于零, 所以 $f \mapsto |f|_{x_r}$ 关于原 Banach 范数连续. 事实上, $|f - g|_{x_r} = \|f - g\|^\alpha$ 还说明这两个范数定义相同的拓扑.

但有界性要求存在常数 $C > 0$, 使 $|f|_{x_r} \leq C\|f\|$ 对所有 $f \in A$ 成立. 若 $0 < r \leq R$, 由 $\nu(f) \geq 0$ 可得 $|f|_{x_r} \leq \|f\|$, 故 $x_r \in \mathcal{M}(A)$. 当 $R < r < 1$ 时, 取 $f = T^n$, 则

$$\frac{|T^n|_{x_r}}{\|T^n\|} = \frac{r^n}{R^n} = \left(\frac{r}{R}\right)^n \rightarrow \infty.$$

因此不存在这样的统一常数 C . 尽管 $|\cdot|_{x_r}$ 连续, 它仍不有界, 不能给出 $\mathcal{M}(A)$ 中的点.

推论 2.29 (商代数的 Berkovich 谱). 设 $I \subsetneq A$ 是闭理想, 并在 A/I 上取商范数

$$\|f + I\|_{\text{quot}} = \inf_{i \in I} \|f + i\|.$$

则 A/I 是交换含么 Banach K -代数, 商 K -代数同态 $\rho: A \rightarrow A/I$ 诱导同胚

$$\rho^*: \mathcal{M}(A/I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_A(I) := \{x \in \mathcal{M}(A) : I \subseteq \text{supp}(x)\}.$$

其中 $\mathcal{Z}_A(I) = \bigcap_{f \in I} \{x : |f|_x = 0\}$ 是闭子空间.

证明. 由于 I 闭, 商范数为零的剩余类只有零类. 三角不等式与次乘性由代表元的相应估计取下确界得到. 对 $c \in K^\times$, 利用 $cI = I$, 有 $\|c(f + I)\|_{\text{quot}} = |c|\|f + I\|_{\text{quot}}$; $c = 0$ 时也成立. 完备性可用逐次选取代表元证明: 从商中的 Cauchy 列取子列, 使相邻项之差的商范数小于 2^{-n} , 再选取代表元 a_n , 使 $\|a_{n+1} - a_n\| < 2^{1-n}$. 于是 a_n 在 A 中收敛, 其像给出该子列、从而原 Cauchy 列的极限. 商范数还满足 $\|1 + I\|_{\text{quot}} = 1$: 否则存在 $i \in I$ 使 $\|1 + i\| < 1$, 等比级数使 $-i = 1 - (1 + i)$ 可逆, 这与真理想 I 含有 $-i$ 矛盾. 命题 2.28 给出连续映射 ρ^* , 其像包含于 $\mathcal{Z}_A(I)$. 反过来, 若 $x \in \mathcal{Z}_A(I)$, 则 $|f + I| := |f|_x$ 定义良好. 对每个 $i \in I$, 有 $|f|_x = |f + i|_x \leq \|f + i\|$; 对 i 取下确界, 得到 $|f + I| \leq \|f + I\|_{\text{quot}}$. 这个半范数仍在每个标量 $c + I$ 上取值 $|c|$, 因而给出 $\mathcal{M}(A/I)$ 中的点, 并且是 x 的唯一原像. 两边的求值函数在这个双射下逐项对应, 所以双射及其逆都连续. $\square$

这正是第五讲商环素谱结论的 Banach 版本. 闭性保证商范数是范数, 并使 A/I 保持完备.

2.3.4 谱的紧性

命题 2.30 (紧 Hausdorff 性). Berkovich 谱 $\mathcal{M}(A)$ 是紧 Hausdorff 空间.

证明. 命题 2.24 把每个点看作乘积空间 $P = \prod_{f \in A} [0, \|f\|]$ 中的一族实数 $(|f|_x)_{f \in A}$. 各因子都是紧 Hausdorff 空间, 故 Tychonoff 定理说明 P 也是如此. 在 P 中, 条件 $x_0 = 0, x_1 = 1, x_c = |c| (c \in K), x_{fg} = x_f x_g$ 以及 $x_{f+g} \leq x_f + x_g$ 都是闭条件; 对所有

$c \in K, f, g \in A$ 取交, 得到闭子集 $\mathcal{M}(A)$. 其子空间拓扑正是使每个坐标 $x \mapsto |f|_x$ 连续的最弱拓扑, 所以与定义中的拓扑相同. $\square$

因此, 只要 $\mathcal{M}(A)$ 非空, 每个函数 $x \mapsto |f|_x$ 都在谱上达到最大值. 紧性来自全部半范数公理组成的闭条件, 而不要求底域的闭球紧. 例如任何完备赋值域 K 都满足 $\mathcal{M}(K) = \{|\cdot|\}$, 因为有界乘法半范数必在 K 上等于原赋值.

Banach K -代数的 Berkovich 谱及其基本性质可参见 [1] 第 1 章.

2.3.5 拓展阅读: 一般赋值与赋值谱

本小节设 K 非阿基米德, A 仍是本讲约定的 Banach K -代数. 实值半范数把函数大小放在同一条实数轴上; 若把正实数乘法群换成一般的全序交换群, 则可以记录更细的大小关系. 这里的全序与群乘法相容, 即 $\alpha \leq \beta$ 蕴含 $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

定义 2.31 (赋值谱). 设 Γ 是按乘法记号书写的全序交换群, 添入小于所有群元素的吸收元 0. A 上取值于 $\Gamma \cup \{0\}$ 的赋值是映射 v , 满足

$$v(0) = 0, \quad v(1) = 1, \quad v(fg) = v(f)v(g), \quad v(f+g) \leq \max\{v(f), v(g)\}.$$

两个赋值 v, w 称为等价, 若对任意 $f, g \in A, v(f) \leq v(g)$ 当且仅当 $w(f) \leq w(g)$. A 的赋值谱 $\text{Spv}(A)$ 是这些赋值的等价类组成的集合, 其拓扑由集合

$$U(f/g) = \{[v] : v(f) \leq v(g) \neq 0\}, \quad f, g \in A,$$

生成. 这里 f/g 只是开集的记号, 不要求 g 可逆.

$\text{Spv}(A)$ 只使用 A 的底层环, 尚不要求赋值延拓 K 的赋值或满足 Banach 有界性. 与支撑命题中的证明相同, $v^{-1}(0)$ 是素理想; 等价赋值有相同的零点集, 因而得到映射 $\text{Spv}(A) \rightarrow \text{Spec} A, [v] \mapsto v^{-1}(0)$.

要使赋值与 A 的范数拓扑相容, 记 $\Gamma_v = \langle v(A) \setminus \{0\} \rangle$, 即所有非零取值生成的子群. 若对每个 $\gamma \in \Gamma_v$, 集合 $\{f \in A : v(f) < \gamma\}$ 都开, 则称 v 连续. 使用这个由取值生成的群, 可使连续性不依赖冗余的值群选择, 并在赋值等价下不变. 连续赋值的等价类构成子空间 $\text{Cont}(A)$.

命题 2.25 保证 Berkovich 点给出上述意义的赋值, 命题 2.24 又保证其连续, 故有集合映射

$$\mathcal{M}(A) \longrightarrow \text{Cont}(A), \quad x \longmapsto [|\cdot|_x].$$

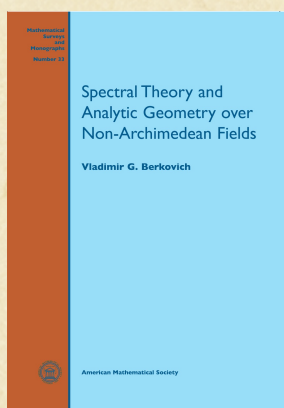
它可能不单射. 在前面的 $A = k[[T]]$ 例子中, 所有 $0 < r \leq R < 1$ 给出的 x_r 都不同, 但对非零 f, g , 比较 $r^{\nu(f)} \leq r^{\nu(g)}$ 恰好等价于 $\nu(f) \geq \nu(g)$, 与 r 无关; 涉及零元的比较

也相同. 所以这些谱点在 $\text{Cont}(A)$ 中的像都是同一个赋值等价类. $\mathcal{M}(A)$ 保留具体的实数取值, $\text{Spv}(A)$ 则只保留取值之间的比较关系.

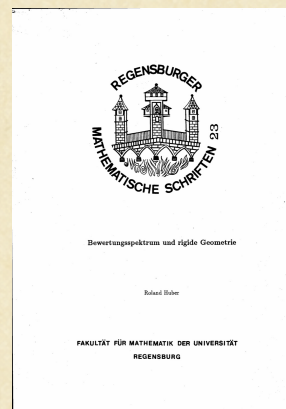
〔史略〕 Berkovich 与 Huber: 两种赋值几何



Vladimir Berkovich 肖像



Berkovich 1990 年专著 *Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-Archimedean Fields* 封面



Roland Huber 1993 年专著 *Bewertungsspektrum und rigide Geometrie* 封面.¹

Berkovich 在 1990 年的专著中以有界乘法半范数为点建立非阿基米德解析几何. 这里从特征标到半范数的转变有具体的数学意义: 在复数域上, 完备剩余域仍是 $\mathbb{C}$, 因而恢复 Gelfand 谱; 在非阿基米德底域上, 完备剩余域可以大于底域 (是底域的域扩张), 从而容纳不能由 K -值求值给出的点. 本讲的紧性证明则说明, 这些半范数在逐点收敛拓扑下组成紧 Hausdorff 空间.

Huber 的 1993 年专著系统研究赋值谱与刚性几何的联系. 允许一般有序值群后, 还可保留实数值群无法表达的多层次大小关系; 连续性条件使赋值与代数的拓扑相容. 这一路径以赋值等价类为点.

习题

- (1) 对本讲的 Banach K -代数 A 上的有界乘法半范数, 直接对 f^n 使用有界性, 证明 $|f|_x \leq \|f\|$, 再证明 $||f|_x - |g|_x| \leq \|f - g\|$.
- (2) 取平凡赋值域 k , 令 $A = k[[T]]$, 并取正文中的范数 $\|f\| = R^{\nu(f)}$, 其中 $0 < R < 1$. 对 $R < r < 1$, 证明 $f \mapsto r^{\nu(f)}$ (零元取值为零) 是连续的乘法半范数, 且延拓 k 的赋值, 但不属于 $\mathcal{M}(A)$.
- (3) 设 K 非阿基米德. 不用归纳法, 而对 $(f_1 + \cdots + f_m)^n$ 展开, 证明延拓底域赋值的乘法半范数满足 $|f_1 + \cdots + f_m|_x \leq \max_j |f_j|_x$.

¹三图依次来源: Weizmann Institute of Science, Vladimir Berkovich; American Mathematical Society, *Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-Archimedean Fields*; Roland Huber, *Bewertungsspektrum und rigide Geometrie*, Regensburger Mathematische Schriften 23, 1993 年, 作者提供的专著电子版, 封面.

- (4) 设 A, B, C 是本讲约定下的 Banach K -代数, $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ 是保持幺元的有界 K -代数同态. 验证 $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$, 并写出相应的支撑等式.
- (5) 对 $x \in \mathcal{M}(A)$, 证明 $\mathfrak{p} = \text{supp}(x)$ 是素理想, 且 $|f| + |\mathfrak{p}| = |f|_x$ 在 $A/\mathfrak{p}$ 上定义乘法范数. 再设 $I \subsetneq A$ 是闭理想. 在商谱同胚下比较求值函数, 证明其逆映射连续.
- (6) 设 $m \geq 1$. 给 K^m 取最大范数, 并由对角映射视为 Banach K -代数. 利用标准幂等元证明 $\mathcal{M}(K^m)$ 恰有 m 个点, 求出其支撑与完备剩余域.
- (7) 在正文的 $k[[T]]$ 例子中, 证明 $r \mapsto x_r$ 在 $0 < r \leq R$ 上连续. 令 $x_0(f)$ 为常数项在 k 中的赋值, 证明该映射连续延拓到 $r = 0$, 并求其支撑.
- (8) 若 A 的范数具有乘法性, 证明这个范数本身给出 $\mathcal{M}(A)$ 的一个点, 而且对所有 $f \in A$ 都有 $\max_x |f|_x = \|f\|$.
- (9) 若 A 上两个与同一 K -代数结构相容的 Banach 范数彼此由常数倍控制, 证明它们定义相同的 Berkovich 谱及拓扑. 这里比较的是半范数本身, 而不把不同半范数视为同一个点.
- (10) 设 $f \in A^\times$. 证明对所有 $x \in \mathcal{M}(A)$, $|f|_x \geq \|f^{-1}\|^{-1} > 0$. 再证明若 $\|f - g\| < \|f^{-1}\|^{-1}$, 则 g 也是单位.
- (11) 设 (F_λ) 是紧谱 $\mathcal{M}(A)$ 中一族闭子集, 每个有限子族的交非空. 证明 $\bigcap_\lambda F_\lambda \neq \emptyset$. 据此解释: 有限多个函数的闭不等式约束逐批可解时, 全部约束可以同时满足.
- (12) 设 A_0 是 A 的稠密子环. 证明两个点若在 A_0 上相等, 就在 A 上相等. 进一步证明, 谱的拓扑可仅用 $f \in A_0$ 的求值函数生成. 提示: 以命题 2.24 作对全部谱点一致的估计.
- (13) 赋值谱 (选做). 设 K 非阿基米德. 对素理想 $\mathfrak{p} \subset A$, 定义 $v_{\mathfrak{p}}(f) = 0 (f \in \mathfrak{p})$, 而 $v_{\mathfrak{p}}(f) = 1 (f \notin \mathfrak{p})$. 证明这是一个赋值, 从而得到 $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spv}(A)$, 其与支撑映射的复合为恒等映射. 证明 $v_{\mathfrak{p}}$ 连续当且仅当 $\mathfrak{p}$ 为开集. 若 K 的赋值非平凡, 说明它为何不可能是 $\mathcal{M}(A)$ 的点.
- (14) 连续性与赋值等价 (选做). 设 K 非阿基米德, $x \in \mathcal{M}(A)$. 对 $\gamma > 0$, 用 $|f|_x \leq \|f\|$ 直接证明 $\{f \in A : |f|_x < \gamma\}$ 为开集. 再在正文的 $k[[T]]$ 例子中, 证明 $0 < r \leq R$ 对应的 x_r 两两不同, 却给出同一个连续赋值等价类.

参考文献与延伸阅读

- [1] BERKOVICH V G. Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-Archimedean Fields: vol. 33[M/OL]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1990. DOI: 10.1090/surv/033.