

3.1 第 7 讲 非阿基米德几何与圆盘半范数

3.1.1 等腰三角形与球的几何

本讲除另有说明外, K 表示完备的非阿基米德赋值域, 距离取为 $d(a, b) = |a - b|$.

定义 3.1. 对 $a \in K$ 和实数 $r > 0$, 记

$$D(a, r) = \{z \in K : |z - a| \leq r\} \quad \text{和} \quad D^-(a, r) = \{z \in K : |z - a| < r\},$$

分别称为闭球和开球; 另约定 $D(a, 0) = \{a\}$.

引理 3.2. K 中的三角形都是等腰三角形, 以最短边为底.

证明. 若 $d(a, b)$ 是唯一最长边, 则强三角不等式给出矛盾:

$$d(a, b) \leq \max\{d(a, c), d(c, b)\} < d(a, b).$$

因此, 两条最长边必等长. □

将引理用于 $0, u, -v$, 可知当 $|u| \neq |v|$ 时, $|u + v| = \max\{|u|, |v|\}$. 更一般地, 若有限个元素 $u_1, \dots, u_n$ 中恰有一项的赋值最大, 则 $|\sum_{j=1}^n u_j| = \max_j |u_j|$. 单项情形显然; 至少两项时, 其余项之和的赋值严格小于唯一最大项的赋值, 再应用两项和的结论即可.

命题 3.3. K 中的球具有以下性质:

- (i) 球中任一点都可作为其球心. 两个闭球若相交, 则半径较小者包含于较大者; 两个开球也有同样性质. 因此, 同为开球或同为闭球的两个等半径球或相等, 或不交.
- (ii) 若 $b \notin D(a, r)$, 则对每个 $z \in D(a, r)$, 有 $|z - b| = |a - b|$.
- (iii) 每个开球和每个正半径闭球都是闭开集, 即同时为闭集和开集.

证明. (i) 若 $b \in D(a, r)$, 则 $|z - b| \leq \max\{|z - a|, |a - b|\}$ 给出 $D(a, r) \subseteq D(b, r)$, 交换球心即得相等. 开球用严格不等式作相同论证. 两个相交的球可取交点为共同球心, 包含关系便由半径大小得到.

(ii) 因为 $|z - a| \leq r < |a - b|$, 引理 3.2 给出 $|z - b| = |a - b|$.

(iii) 正半径闭球 $D(a, r)$ 中每一点 b 都有开邻域 $D^-(b, r) \subseteq D(a, r)$, 故闭球也是开集. 闭性来自距离函数的连续性. 若 $b \notin D^-(a, r)$, 则 $D^-(b, |b - a|)$ 与原开球不交; 所以开球的补集是开集, 开球也为闭集. □

例如, 在 $\mathbb{Q}_p$ 中, $D(0, p^{-1}) = D(p, p^{-1}) = p\mathbb{Z}_p$.

$\mathbb{Z}_3$ 的无穷三叉树. 以 $\mathbb{Z}_3$ 为根, 把第 n 层的节点取为闭球 $a + 3^n \mathbb{Z}_3 = D(a, 3^{-n})$, 其中 $a \in \{0, \dots, 3^n - 1\}$. 每个球恰好分成三个互不相交的较小球:

$$a + 3^n \mathbb{Z}_3 = \bigcup_{j=0}^2 (a + j3^n + 3^{n+1} \mathbb{Z}_3).$$

以球作节点, 便得一棵不断向下分叉的树.

每个元素 $x = x_0 + x_1 3 + x_2 3^2 + \dots \in \mathbb{Z}_3$, 其中 $x_j \in \{0, 1, 2\}$, 依次选定包含它的球 $x + 3^n \mathbb{Z}_3$, 因而确定一条从根出发的无穷分支. 反过来, 沿一条无穷分支逐层读出数字 $x_0, x_1, \dots$, 便得到唯一的 3-进整数. 因此, $\mathbb{Z}_3$ 的元素对应树的无穷枝端. 一个球所含的元素, 恰好是从对应节点向下延伸的全部枝端.

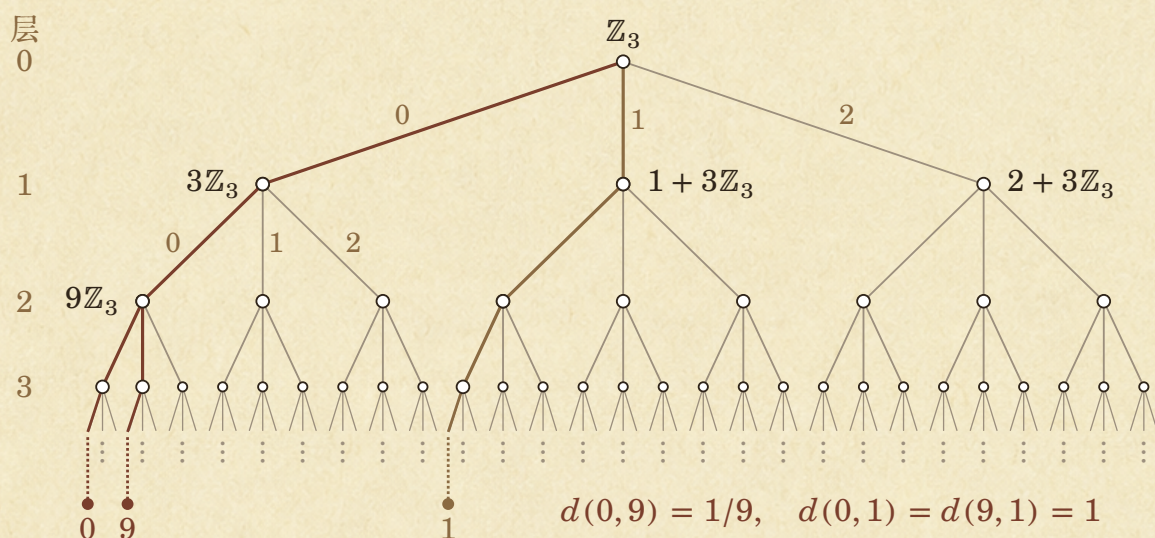


图 3.1: $\mathbb{Z}_3$ 的球树与无穷枝端. 空心节点表示球, 每个节点向下分出三个子球; 省略号表示分叉无限继续. 枝上的数字表示下一位 3-进数字. 实心点标出三个选定的无穷枝端 0, 9, 1. 0 与 9 同属 $9\mathbb{Z}_3$, 而 1 位于另一主分支.¹

上图解释 $\mathbb{Z}_3$ 中球的包含关系: 若两球相交, 则它们的节点位于通向同一枝端的分支上, 一个必在另一个下方, 所以两球必然嵌套; 若节点不在同一分支上, 两个球便不相交. 而第 n 层同一节点下的任意枝端都有相同的前 n 位数字, 故球内点都可作球心.

对不同的 x, y , 记它们从根出发最后一个共同节点的层数为 $m = m(x, y)$. 这就是说, $x \equiv y \pmod{3^m}$, 但 $x \not\equiv y \pmod{3^{m+1}}$, 故 $d(x, y) = |x - y|_3 = 3^{-m(x, y)}$. 例如, 0 与 9 的共同分支延伸至第 2 层, 而它们与 1 只共用根节点, 所以 $d(0, 9) = 1/9$, $d(0, 1) = d(9, 1) = 1$. 而 0, 1, 2 分属三个主分支, 两两距离均为 1. 对三个互异枝端 x, y, z , 令 $n = \min\{m(x, y), m(y, z)\}$. 在第 n 层, x 与 y 、 y 与 z 各自经过相同节点, 三

¹配图依据 Jan E. Holly (2001), *Pictures of Ultrametric Spaces, the p-adic Numbers, and Valued Fields*, 第 723 页图 2 及第 725–726 页图 4–5 的球树表示法重绘; 原图及全文.

者因而都经过同一节点. 于是 $m(x, z) \geq n$, 从而

$$d(x, z) = 3^{-m(x, z)} \leq 3^{-n} = \max\{d(x, y), d(y, z)\}.$$

有两个枝端相同时, 不等式显然成立. 此即强三角不等式. 对于上面的无穷树, 把第 n 至 $n+1$ 层的每边视为长度 $3^{-(n+1)}$ 的线段. 从最后共同节点走向两不同枝端, 路径长为

$$2 \sum_{n=m(x, y)}^{\infty} 3^{-(n+1)} = 3^{-m(x, y)} = |x - y|_3.$$

这里在树的度量完备化中补入无穷枝端; 从根到每个枝端的总长度均为 $1/2$. 上述路径距离限制到枝端空间后, 满足强三角不等式: 两端相遇的位置越接近根, 距离越大; 越深入同一子树, 距离越小. 这些路径经过树的内部节点, 并不是 $\mathbb{Z}_3$ 内的连续道路.

对 $r > 0$, 称 $S(a, r) = \{z : |z - a| = r\}$ 为球面. 由 $S(a, r) = D(a, r) \setminus D^-(a, r)$, 球面也是闭开集; 当 $r \notin |K^\times|$ 时它为开. 例如, 在 $\mathbb{Q}_p$ 中, $D^-(0, 1) = p\mathbb{Z}_p$ 已是闭集, 其闭包不等于 $D(0, 1) = \mathbb{Z}_p$, 而非空球面 $S(0, 1) = \mathbb{Z}_p^\times$ 同样是开集.

经典案例: 巴黎地铁. 巴黎是一个人口 1200 多万的城市, 但其地铁经常罢工或故障. 不妨设某日仅 3, 5, 6 号线运营. 记 $\rho(x, y)$ 为两站之间最少经过的站间区段数. 取三个站: a 为 3 号线的 Gallieni, b 为 5 号线的 Laumière, c 为 6 号线的 Nation.



巴黎相关线路. a, b, c 为选定三站, d, e 为换乘枢纽; M3-6 表示 3 号线的 6 个站间区段.²

3 号线与 5 号线只在 République 站 d 换乘, 5 号线与 6 号线只在 Place d'Italie 站 e 换乘, 3 号线与 6 号线不直接相交. 按实际站序, 由于没有其他换乘通路,

$$\rho(a, b) = 6 + 6 = 12, \quad \rho(a, c) = \rho(b, c) = 6 + 9 + 9 = 24.$$

所以 $\{a, b, c\}$ 配上 ρ 满足超三角不等式: 最长的两边等长, 短边为底.

3.1.2 赋值拓扑、收敛与函数逼近

赋值拓扑中的开集是开球的任意并. 一个空间称为完全不连通的 (totally disconnected), 如果其连通子集至多含一个点; 一个函数称为局部常值的 (locally constant), 如果每一点都有使函数恒定的邻域.

命题 3.4. 完备的非阿基米德赋值域 K 的拓扑具有以下性质:

- (i) K 是 Hausdorff 的、完全不连通的, 每一点都有可数的闭开邻域基. 特别地, 连续映射 $[0, 1] \rightarrow K$ 都是常值.
- (ii) K 的拓扑离散当且仅当赋值平凡. 若赋值非平凡, 则 K 无孤立点; 任取 $0 < |\pi| < 1$, $\{\pi^n K^\circ : n \geq 0\}$ 都是 0 的邻域基.
- (iii) 对固定的 $a \in K$, 函数 $z \mapsto |z - a|$ 在 $K \setminus \{a\}$ 上局部常值. 特别地, 若 $z_n \rightarrow z \neq 0$, 则最终有 $|z_n| = |z|$.
- (iv) 加法 $K \times K \rightarrow K$ 、乘法 $K \times K \rightarrow K$ 与求逆 $K^\times \rightarrow K^\times$ 均连续; 换言之, K 是拓扑域 (topological field).

证明. (i) 不同的 a, b 有不相交的邻域 $D^-(a, |a - b|)$ 与 $D^-(b, |a - b|)$, 故 K 是 Hausdorff 的. 闭球 $D(a, 1/n)$ 构成 a 的可数闭开邻域基. 若子集 S 含有不同的 a, b , 取 $0 < r < |a - b|$, 则 $S \cap D(a, r)$ 与 $S \setminus D(a, r)$ 给出 S 的两个非空相对开集, 故 S 不连通. 实区间的连续像连通, 因此只能是单点.

(ii) 平凡赋值下, $D^-(a, 1) = \{a\}$. 非平凡时, $a + \pi^n \rightarrow a$ 且各项不等于 a , 故没有孤立点. 又因 $\pi^n K^\circ = D(0, |\pi|^n)$ 且半径趋于零, 它们构成邻域基.

(iii) 若 $|w - z| < |z - a|$, 则引理 3.2 给出 $|w - a| = |z - a|$. 取 $a = 0$, 并对收敛列取充分靠后的项, 即得最后的断言.

(iv) 加法连续来自强三角不等式. 对于乘法, 当 $h, k \rightarrow 0$ 时, $(a + h)(b + k) - ab = ak + bh + hk \rightarrow 0$. 若 $a \neq 0$ 且 $|z - a| < |a|$, 则 $|z| = |a|$, 从而 $|z^{-1} - a^{-1}| = |z - a|/|a|^2 \rightarrow$

²线路与站点: Île-de-France Mobilités (Licence Ouverte 2.0); 底图: Ville de Paris / Paris Data 的街路、水域、绿地及行政区界 (ODbL).

0, 故求逆也连续. $\square$

例 3.5. 设 $x = \sum_{j \geq 0} x_j p^j, y = \sum_{j \geq 0} y_j p^j \in \mathbb{Z}_p$, 其中 $x_j, y_j \in \{0, \dots, p-1\}$. 若第一个不同数字位于第 m 位, 则 $|x - y|_p = p^{-m}$. 因此, 对 $x_n, x \in \mathbb{Z}_p$, 收敛 $x_n \rightarrow x$ 等价于: 对每个 $m \geq 1$, 最终有 $x_n \equiv x \pmod{p^m \mathbb{Z}_p}$.

证明. 写成 $x - y = p^m((x_m - y_m) + pu)$, 其中 $u \in \mathbb{Z}_p$. 因为 $p \nmid (x_m - y_m)$, 括号内元素的赋值为 1, 故距离为 p^{-m} . 再用 $x + p^m \mathbb{Z}_p = D(x, p^{-m})$ 构成邻域基, 即得收敛判据. $\square$

例如, 自然数列 $1, 2, 3, \dots$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 中不收敛, 因为相邻两项距离恒为 1.

对序列 $(u_n)_{n \geq 0}$, 称有限和 $S_N = \sum_{j=0}^N u_j$ 为第 N 个部分和. 级数 $\sum_{n \geq 0} u_n$ 收敛, 是指部分和序列 $(S_N)_{N \geq 0}$ 在 K 中收敛; 它的极限称为这个级数的和.

命题 3.6. 在完备非阿基米德赋值域 K 中, 级数 $\sum_{n \geq 0} u_n$ 收敛当且仅当 $u_n \rightarrow 0$.

证明. 若部分和 S_N 收敛于 S , 则 $u_N = S_N - S_{N-1} \rightarrow S - S = 0$. 反之, 设 $u_n \rightarrow 0$. 给定 $\varepsilon > 0$, 可取 N_0 , 使 $j > N_0$ 时 $|u_j| < \varepsilon$. 对任意 $M > N \geq N_0$, 强三角不等式给出

$$|S_M - S_N| = \left| \sum_{j=N+1}^M u_j \right| \leq \max_{N < j \leq M} |u_j| < \varepsilon.$$

交换 M, N 也得到同样的估计, 故只要两个指标都充分大, 对应部分和的距离就小于 ε . 这正说明 (S_N) 是 Cauchy 列. 由 K 的完备性, 它在 K 中收敛, 因而原级数收敛. $\square$

例如, 在 $\mathbb{Q}_p$ 中, 因为 $p^n \rightarrow 0$, 所以 $\sum_{n \geq 0} p^n = (1 - p)^{-1} \in \mathbb{Q}_p$.

级数 $\sum_{n \geq 0} n!$ 在每个 $\mathbb{Q}_p$ 中也收敛. 同理, 若 $c_n \rightarrow 0$ 且 $|a| \leq 1$, 则 $|c_n a^n| \rightarrow 0$, 故 Tate 级数 $\sum c_n T^n$ 可以在 a 处求值.

记 $C(\mathbb{Z}_p, K)$ 为连续函数 $\mathbb{Z}_p \rightarrow K$ 的空间, 赋予一致范数 $\|f\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)|$. 第二讲已证明 $\mathbb{Z}_p$ 紧, 因而此最大值存在.

命题 3.7. 局部常值函数在 $C(\mathbb{Z}_p, K)$ 中关于一致范数 $\|\cdot\|_\infty$ 稠密.

证明. 对 $f \in C(\mathbb{Z}_p, K)$, 在每个同余类 $j + p^m \mathbb{Z}_p$ 上定义 $f_m(x) = f(j)$, 其中 $0 \leq j < p^m$. 各同余类都是闭开集, 故 f_m 连续且局部常值. 由于 f 在紧空间 $\mathbb{Z}_p$ 上一致连续, 给定 $\varepsilon > 0$, 可取 M , 使 $|x - y|_p \leq p^{-M}$ 时 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 若 $m \geq M$ 且 $x \in j + p^m \mathbb{Z}_p$, 则 $|f(x) - f_m(x)| = |f(x) - f(j)| < \varepsilon$. 在紧集上取最大值, 得到 $\|f - f_m\|_\infty < \varepsilon$. $\square$

$\mathbb{Q}_p$ 的每一点都有紧邻域 $a + \mathbb{Z}_p$, 因此是局部紧的 (locally compact).

例 3.8. 设 k 是无限域, 且 $k[[t]] = \{f = \sum_{n \geq 0} a_n t^n : a_n \in k\}$ 是形式幂级数环. 定义

$$k((t)) = \{\sum_{n \geq N} a_n t^n : N \in \mathbb{Z}, a_n \in k\},$$

它是 $k[[t]]$ 的分式域, 称为形式 Laurent 级数域. 固定 $0 < \theta < 1$, 对非零级数令

$$|f| = \theta^{\text{ord}_t(f)},$$

其中 $\text{ord}_t(f)$ 是 f 在 $t = 0$ 处的阶, 即最低非零项的指数, 另令 $|0| = 0$. 则 $|\cdot|$ 是域 $k((t))$ 上的非阿基米德赋值, 且 $k((t))$ 完备, 但不局部紧; 其闭单位球 $k[[t]]$ 不紧.

证明. Laurent 级数关于加法与乘法封闭性显然. 每个 $k[[t]]$ 中非零级数可写为 $at^N(1+h)$, 其中 $a \in k^\times, h \in tk[[t]]$, 其逆为 $a^{-1}t^{-N} \sum_{j \geq 0} (-h)^j$. 该表达式仅有限个 t 的负幂次, 因此仍属于 $k((t))$, 所以 $k((t))$ 是 $k[[t]]$ 的分式域.

现验证 $|\cdot|$ 是非阿基米德赋值. 任两个 Laurent 级数最低次项的乘积非零, 因而 $\text{ord}_t(fg) = \text{ord}_t(f) + \text{ord}_t(g)$; 加法满足 $\text{ord}_t(f+g) \geq \min\{\text{ord}_t(f), \text{ord}_t(g)\}$.

证明 $k((t))$ 的完备性. 设 (f_n) 是其中的 Cauchy 列. 先取 n_0 , 使 $m, n \geq n_0$ 时 $|f_m - f_n| \leq 1$. 按赋值的定义, 这表示 $f_m - f_n$ 不含负次幂, 因而所有 $n \geq n_0$ 的 f_n 都与 f_{n_0} 有相同的负次幂部分. f_{n_0} 只有有限个负次幂项, 所以可取整数 $L \leq 0$, 使这些 f_n 都不含低于 L 次的项, 统一写成 $f_n = \sum_{j \geq L} a_{n,j} t^j$.

再固定整数 $M \geq 0$. 由 Cauchy 条件, 可取 $N_M \geq n_0$, 使 $m, n \geq N_M$ 时 $|f_m - f_n| \leq \theta^M$. 这表示 $f_m - f_n$ 不含低于 M 次的项, 即对所有 $L \leq j < M$, 都有 $a_{m,j} = a_{n,j}$. 因此, 对每个固定的 $j \geq L$, 取 $M > j$ 后可知: 当 n 足够大时, 系数 $a_{n,j}$ 不再改变. 记这个最终不变的值为 a_j , 并令 $f = \sum_{j \geq L} a_j t^j$. 由于指数仍有下界 L , 所以 f 确实属于 $k((t))$.

最后验证 $f_n \rightarrow f$. 给定 $\varepsilon > 0$, 取整数 $M \geq 0$, 使 $\theta^M < \varepsilon$. 当 $n \geq N_M$ 时, 对每个 $L \leq j < M$ 都有 $a_{n,j} = a_j$, 所以 $f_n - f$ 不含低于 M 次的项, 从而 $|f_n - f| \leq \theta^M < \varepsilon$.

不同常数 $c_0 \in k$ 之间的距离都是 1, 因为 k 是无限域, 所以 $k[[t]]$ 不能被有限个半径小于 1 的球覆盖, 因而不紧. 更一般地, 0 的每个邻域都包含某个 $t^N k[[t]]$, 其中的元素 $t^N c (c \in k)$ 两两距离均为 θ^N . 因此 0 没有紧的邻域, 此域不局部紧. $\square$

3.1.3 从闭球到 Berkovich 圆盘点

令 $A = K\langle T \rangle$, 任意元素可表为 $f = \sum_{n \geq 0} c_n T^n$, 其中 $c_n \rightarrow 0$ 为 K 中系数. 回忆第二讲的 Gauß 范数 $\|f\|_G = \max_n |c_n|$. 以下固定 $|a| \leq 1, 0 \leq r \leq 1$, 考虑普通闭球

$$D(a, r) = \{z \in K : |z - a| \leq r\}.$$

在这个球上 $|z| \leq 1$, 所以每个 $f \in A$ 都可以求值, 且 $|f(z)| \leq \|f\|_G$.

复分析的最大模原理表明: 函数在正半径闭圆盘上连续、内部全纯时, 其最大模在边界圆周上达到. 受此启发, 这里也先考虑圆盘上 f 模长的上确界

$$s_{a,r}(f) = \sup_{z \in D(a,r)} |f(z)|.$$

它是有限的, 且逐点估计给出强三角不等式与次乘性. 但 $s_{a,r}(\cdot)$ 不是乘性的, 见下例.

例 3.9 (普通闭球上的上确界). 在 $K = \mathbb{Q}_2, D(0, 1) = \mathbb{Z}_2$ 上, 简记 $s = s_{0,1}$. 取 $f = T, g = T - 1$, 则 $s(f) = s(g) = 1$, 分别在 $z = 1, z = 0$ 处达到. 对任意 $z \in \mathbb{Z}_2, z, z - 1$ 中至少一个属于 $2\mathbb{Z}_2$, 故 $|z(z - 1)|_2 \leq 1/2$, 并在 $z = 2$ 处达到等号. 因此

$$s(fg) = 1/2 < s(f)s(g) = 1,$$

而 $\|fg\|_G = 1$. 该例子既说明上确界未必有乘性, 也说明它可能严格小于 Gauß 范数.

Gauß 范数已有乘法性. 为了把它用于球心 a , 先把级数改写成 $T - a$ 的幂级数.

引理 3.10. 若 $|a| \leq 1$, 则代换 $T \mapsto T + a$ 延拓为 A 的等距 K -代数自同构. 因此, 每个 $f \in A$ 都有唯一的展开 $f = \sum_{n \geq 0} c_n (T - a)^n$, 其中 $c_n \rightarrow 0$, 且 $\|f\|_G = \max_n |c_n|$.

证明. 由多项式在 A 中稠密及 A 完备, 我们仅需考虑多项式的变量代换. 二项式展开及 $|\binom{n}{j}| \leq 1$ 表明代换 $T \mapsto T + a$ 不增大 Gauß 范数. 其逆代换 $T \mapsto T - a$ 也不增大范数, 故两者都是等距映射. 对以 T 为变量的级数用这两个代换, 便得所述展开及范数. $\square$

由引理 3.10, 可将 f 写成以 a 为中心的展开 $f = \sum_{n \geq 0} c_n (T - a)^n$. 若 $r > 0$, 则对圆盘内任意 $z \in D(a, r)$, 第 n 项满足 $|c_n (z - a)^n| \leq |c_n| r^n$. 对有限部分和应用强三角不等式, 再取极限, 并对 z 取上确界, 得 $s_{a,r}(f) \leq \max_{n \geq 0} |c_n| r^n$.

当 $r = |b| (b \in K^\times)$ 时, 该上界正是把圆盘缩放到单位圆盘后所得的 Gauß 范数. 具体地, 代换 $z = a + bu$ 使 $|z - a| \leq r$ 等价于 $|u| \leq 1$. 以 U 为新变量, 原函数改写为 $f(a + bU) = \sum_{n \geq 0} c_n b^n U^n$. 由于 $|b| = r \leq 1$ 且 $c_n \rightarrow 0$, 新系数 $c_n b^n$ 也趋于零, 故该级数属于 $K\langle U \rangle$, 其 Gauß 范数为

$$\|f(a + bU)\|_G = \max_{n \geq 0} |c_n| r^n.$$

变量代换保持乘法, Gauß 范数又有乘性, 所以上式也有乘性, 且只依赖 $r = |b|$.

若 $0 < r \leq 1$, 即便可能 $1 > r \notin |K^\times|$, 仍有 $|c_n| r^n \rightarrow 0$, 故同一个最大值公式依然有意义, 可以用它定义半径为 r 的圆盘半范数. 当 $r = 0$ 时, 圆盘只有点 a , 则取 $|f(a)|$.

定义 3.11 (圆盘半范数). 对以 a 为中心的展开 $f = \sum_{n \geq 0} c_n (T - a)^n$, 定义

$$\|f\|_{a,r} = \begin{cases} \max_{n \geq 0} |c_n| r^n, & r > 0, \\ |f(a)|, & r = 0. \end{cases}$$

称其为以 a 为中心、半径为 r 的圆盘半范数.

由构造, $s_{a,r}(f) \leq \|f\|_{a,r} \leq \|f\|_G$. 当 $r = 1$ 时, 它就是 Gauß 范数; 当 $r = 0$ 时, 它就是在 a 处求值后取赋值.

命题 3.12. 圆盘半范数延拓 K 的赋值, 满足强三角不等式与乘法性, 并且有界. 当 $r > 0$ 时, 它是范数.

证明. 常数上的取值、强三角不等式及 $\|f\|_{a,r} \leq \|f\|_G$ 均由系数公式得到. $r = 0$ 时乘法性来自求值同态. 以下设 $r > 0$, 取非零的 $f = \sum c_n (T - a)^n, g = \sum d_n (T - a)^n$. 加权系数趋于零, 故可分别取达到 $\|f\|_{a,r}, \|g\|_{a,r}$ 的最大指标 i, j . 乘积中次数 $i + j$ 的系数为 $\sum_{k+\ell=i+j} c_k d_\ell$. 除 $(k, \ell) = (i, j)$ 外, 总有 $k > i$ 或 $\ell > j$, 故其他项的赋值乘以权重 r^{i+j} 后均严格小于 $|c_i| r^i |d_j| r^j$. 唯一最大项不能被抵消, 所以 $\|fg\|_{a,r} \geq \|f\|_{a,r} \|g\|_{a,r}$. 反向不等式来自卷积公式, 因而等号成立. 非零级数至少有一个非零系数, 故正半径时这个半范数正定. $\square$

回忆: A 上延拓 K 赋值的有界乘法半范数称为一个 Berkovich 点; 它们组成的集合称为 Berkovich 谱, 记为 $\mathcal{M}(A)$. 对其中的点 x , 记相应的半范数为 $f \mapsto |f|_x$. 谱上赋予使每个取值函数 $x \mapsto |f|_x (f \in A)$ 连续的最弱拓扑. 有界性可等价地写为 $|f|_x \leq \|f\|_G$: 若原估计含常数 $C > 0$, 将它用于 f^n , 再取 n 次方根并令 $n \rightarrow \infty$ 即得.

命题 3.12 因而给出谱点 $x_{a,r}$, 约定 $|f|_{x_{a,r}} = \|f\|_{a,r}$ [1]^{Exercise 4.3.8}. $r = 0$ 时这就是普通求值点 a ; 正半径时, 它不是任何普通求值点: 在普通点 b 处, 非零函数 $T - b$ 取值为零, 而正半径的圆盘半范数正定.

对谱点 x , 其支撑为 $\text{supp}(x) = \{f \in A : |f|_x = 0\}$. 强三角不等式与乘法性使这个核成为素理想.

命题 3.13. 设 $|a| \leq 1, 0 \leq r \leq 1$. 则 $\text{supp}(x_{a,0}) = (T - a)$, 而 $\text{supp}(x_{a,r}) = (0)$ 对 $r > 0$ 成立. 对任意 $b \in K$,

$$|T - b|_{x_{a,r}} = \max\{r, |a - b|\}.$$

对固定的 r , 有 $x_{a,r} = x_{b,r}$ 当且仅当 $|a - b| \leq r$ (其中两个球心均在闭单位球中).

证明. 求值核为 $(T - a)$ 已在第二讲算出; 正半径时的支撑结论来自正定性. 把 $T - b = (T - a) + (a - b)$ 代入定义 3.11 即得取值公式. 若两个点相等, 比较 $T - b$ 的取值可知

$|a - b| \leq r$. 反之, 设 $|a - b| \leq r$. 若 $r = 0$, 则 $a = b$. 若 $r > 0$, 上式给出 $\|T - b\|_{a,r} = r$, 故对多项式 $P = \sum_{n=0}^N d_n (T - b)^n$, 有 $\|P\|_{a,r} \leq \max_{0 \leq n \leq N} |d_n| r^n = \|P\|_{b,r}$. 交换 a, b 得到反向不等式, 再由多项式稠密及两个范数均受 Gauß 范数控制, 便得到所有 $f \in A$ 上的等式. $\square$

完备剩余域 $\mathcal{H}(x)$ 是 $\text{Frac}(A/\text{supp}(x))$ 关于诱导赋值的完备化. 因此 $\mathcal{H}(x_{a,0}) = K$; 正半径点的 $\mathcal{H}(x_{a,r})$ 则是 $\text{Frac}(K\langle T \rangle)$ 关于圆盘范数的完备化.

例 3.14 (支撑、球与半径). 对 $0 < r < s \leq 1$, 点 $x_{0,r}, x_{0,s}$ 的支撑都是零理想, 但它们在 T 上的取值分别为 r, s , 因此是不同的谱点. 支撑记录哪些函数取值为零, 圆盘半范数还记录非零取值的大小. 在 $\mathbb{Q}_2$ 中还有 $D(0, 3/4) = D(0, 1/2) = 2\mathbb{Z}_2$, 而 $x_{0,3/4} \neq x_{0,1/2}$. 因此, 相同的 K -值球集附上不同实数半径, 也可能给出不同的圆盘点.

例 3.15 (扩域中的求值). 设 L/K 是完备赋值扩张, $\alpha \in L$ 且 $|\alpha| \leq 1$. 则 $\sum c_n \alpha^n$ 收敛, 且赋值不超过 $\max |c_n|$. 因此 $f \mapsto |f(\alpha)|$ 也给出一个谱点. 若 α 代数于 K 而不在 K 中, 它既不是某个 K -值求值点, 也不是正半径的 $x_{a,r}$: 前者可用 $T - \alpha$ 区别, 后者的支撑为零, 而 α 的最小多项式在这个求值点上为零.

习题

- (1) 设 $S \subseteq \mathbb{Q}_p$, 且存在 $r > 0$, 使 S 中任意两个不同点的距离都等于 r . 证明 S 至多有 p 个元素, 并给出恰有 p 个元素的例子. 由此说明 $\mathbb{Q}_2$ 中没有三个不同顶点组成的等边三角形. 提示: 平移并缩放, 将其中两点化为 $0, 1$, 再考虑模 p 的剩余类.
- (2) 对 $a \in \mathbb{Z}_p, n \geq 0$, 证明 $a + p^n \mathbb{Z}_p$ 恰分成 p 个模 p^{n+1} 的同余类. 用此分解说明两个 p -进整数的距离由第一个不同的数字决定.
- (3) 将 $\mathbb{Q}_p$ 中的球面 $S(0, 1)$ 写成 $p - 1$ 个互不相交的开球之并. 分别求 $D^-(0, 1)$ 、 $D(0, 1)$ 与 $S(0, 1)$ 的内部、闭包和边界. 为什么球面不是闭球的拓扑边界?
- (4) 设 $|a|, |b|, |c| \leq 1, m, n \geq 0$. 计算 $|(T - a)^m (T - b)^n|_{x_{c,r}}$, 其中 $0 \leq r \leq 1$. 再取 $a \neq b$, 指出随着 r 增大, 公式在哪些半径改变形式.
- (5) 在 $\mathbb{Q}_2\langle T \rangle$ 中, 对 $f = 2 + T + T^2/2$ 计算 $r \mapsto |f|_{x_{0,r}}$, 其中 $0 \leq r \leq 1$. 写出分段公式, 核验分界点处的连续性, 并比较 $f(1)$ 的赋值与 $\|f\|_G$.
- (6) 证明 $\mathbb{Q}_2$ 中的球 $D(0, r)$ 在 $1/2 \leq r < 1$ 时相同, 但相应的谱点 $x_{0,r}$ 两两不同. 这说明从哪些数据可以、从哪些数据不可以恢复谱点?
- (7) 在 $\mathbb{Q}_p\langle T \rangle$ 中证明 $\|T^p - T\|_G = 1$, 而 $\sup_{a \in \mathbb{Z}_p} |a^p - a|_p = p^{-1}$. 更一般地, 给定有限个 $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}_p$, 构造 Gauß 范数为 1 且在那些点全为零的多项式.
- (8) 设 L/K 是完备赋值扩张, $\alpha \in L, |\alpha| \leq 1$. 验证 $f \mapsto |f(\alpha)|$ 给出谱点. 若 α 代数于 K 且 $\alpha \notin K$, 证明它不是任意 $|\alpha| \leq 1, 0 \leq r \leq 1$ 所给出的 $x_{a,r}$.
- (9) 证明 K 中的序列 (a_n) 是 Cauchy 列, 当且仅当 $a_{n+1} - a_n \rightarrow 0$.

- (10) 证明收敛级数的任意重排仍收敛于同一个和. 用恒等式 $n \cdot n! = (n+1)! - n!$ 计算 $\mathbb{Q}_p$ 中的 $\sum_{n \geq 1} n \cdot n!$.
- (11) 记 $e_{m,j} : \mathbb{Z}_p \rightarrow K$ 为 $j + p^m \mathbb{Z}_p$ 的示性函数, 其中 $m \geq 1, 0 \leq j < p^m$. 证明 $e_{m,j}^2 = e_{m,j}$, 不同 j 对应的函数之积为零, 且 $\sum_j e_{m,j} = 1$. 说明在每个模 p^m 同余类上恒定的函数组成的代数等距同构于 Kp^m , 右端取最大值范数; 再说明 $C(\mathbb{Z}_p, K)$ 是这些有限维代数之并的完备化.

以下六题讨论由级数定义的函数. 设 p 为素数, K 为 $\mathbb{Q}_p$ 的完备赋值扩张, 赋值满足 $|p| = p^{-1}$, 并记 $R = p^{-1/(p-1)}$. 除另有说明外, 变量均取值于 K ; $v_p(n)$ 表示正整数 n 中因子 p 的指数. 有关对数、指数与二项式级数的进一步讨论, 可参见 [2]§§3-4, 8-9.

(12) 几何级数与算子求逆.

- (i) 证明 $\sum_{n \geq 0} x^n$ 收敛当且仅当 $|x| < 1$, 此时其和为 $(1-x)^{-1}$. 若截断到 x^N , 证明误差的赋值恰为 $|x|^{N+1}$.
- (ii) 设 B 是带么元的 Banach K -代数, 不要求交换, 范数满足强三角不等式、 $\|uv\| \leq \|u\| \|v\|$ 及 $\|1\| = 1$. 若 $\|b\| < 1$, 证明 $\sum_{n \geq 0} b^n$ 收敛且是 $1-b$ 的逆. 进而对 $|\lambda| > \|b\|$, 证明 $(\lambda 1 - b)^{-1} = \sum_{n \geq 0} b^n / \lambda^{n+1}$, 并给出估计 $\|(\lambda 1 - b)^{-1}\| \leq |\lambda|^{-1}$. 这使有界算子的求逆可以化为级数计算.

提示: 先计算有限几何和; 用强三角不等式控制任意一段尾和, 再使用完备性.

(13) p -进对数. 考虑 $\log(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} x^n / n$.

- (i) 证明其收敛域恰为 $|x| < 1$, 且在每个闭球 $|x| \leq r < 1$ 上一致收敛. 边界 $|x| = 1$ 上为什么没有收敛点?
- (ii) 证明当 $|x| < R$ 时, $|\log(1+x)| = |x|$.
- (iii) 在 $\mathbb{Q}_5$ 中计算 $\log 6$ 模 5^4 的剩余类, 并证明所有遗漏项都属于 $5^4 \mathbb{Z}_5$.

提示: $|1/n|_p \leq n$; 排除域外的点时, 考察不被 p 整除的指标 n . 对第二问, 可先证明 $v_p(n) \leq (n-1)/(p-1)$, 再比较一次项与其余项.

(14) p -进指数与阶乘. 考虑 $\exp(x) = \sum_{n \geq 0} x^n / n!$.

- (i) 记 $s_p(n)$ 为 n 的 p -进展开中各位数字之和. 证明 Legendre 公式

$$v_p(n!) = \sum_{j \geq 1} [n/p^j] = \frac{n - s_p(n)}{p-1}.$$

- (ii) 证明指数级数的收敛域恰为 $|x| < R$, 且在每个闭球 $|x| \leq r < R$ 上一致收敛. 特别地, 若 K 中存在满足 $|x| = R$ 的元素, 证明级数在该点发散.
- (iii) 证明 $|x| < R$ 时有 $|\exp(x) - 1| = |x|$. 再在 $\mathbb{Q}_5$ 中计算 $\exp(5)$ 模 5^4 的剩余类, 并估计截断误差.

提示: 第一问依次计算 $1, \dots, n$ 中 $p, p^2, \dots$ 的倍数个数. 第二问在域外考察指标

$n = p^h$; 第三问使用 $v_p(n!) \leq (n-1)/(p-1)$.

- (15) 开圆盘上的级数与 Tate 代数. 记形式幂级数 $L(T) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} T^n / n$, $E(T) = \sum_{n \geq 0} T^n / n!$.

- (i) 证明 $L(T), E(T)$ 均不属于 $K\langle T \rangle$. 对 $b \neq 0$, 证明 $L(bT) \in K\langle T \rangle$ 当且仅当 $|b| < 1$, 而 $E(bT) \in K\langle T \rangle$ 当且仅当 $|b| < R$.
- (ii) 若 $0 < |b| < R$, 证明这两个缩放后的级数满足

$$\|L(bT)\|_G = \|E(bT) - 1\|_G = |b|.$$

证明这两个范数也分别等于相应函数在 $|t| \leq 1$ 上的最大赋值, 且最大值在 $t = 1$ 处取得.

- (iii) 对数级数在开单位圆盘的每一点都收敛, 为什么它仍不属于闭单位圆盘的 Tate 代数? 用系数趋零的条件说明区别.

提示: 沿用前两题的通项估计; 第二问中, 一次项的赋值严格大于所有高次项的共同上界.

- (16) 二项式级数与开根. 对 $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, 规定 $\binom{\alpha}{0} = 1, \binom{\alpha}{n} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)/n!$ ($n \geq 1$), 并考虑 $B_\alpha(x) = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$.

- (i) 证明 $\binom{\alpha}{n} \in \mathbb{Z}_p$, 从而级数在 $|x| < 1$ 收敛, 并在每个闭球 $|x| \leq r < 1$ 上一致收敛. 为什么不能对所有 α 都断言 $|x| < 1$ 是恰好的收敛域?
- (ii) 对 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p, |x| < 1$, 证明 $B_\alpha(x)B_\beta(x) = B_{\alpha+\beta}(x)$, 并求出 $B_{-1}(x)$.
- (iii) 若 $m \geq 1, p \nmid m$ 且 $|x| < 1$, 证明 $B_{1/m}(x)$ 是 $1+x$ 的一个 m 次方根, 并且是所有满足 $|y-1| < 1$ 的 y 中唯一的一个. 例如, 这给出 $\mathbb{Q}_5$ 中满足 $|y-1|_5 < 1$ 的 6 的平方根.

提示: 非负整数在 $\mathbb{Z}_p$ 中稠密, 可将整数的二项式系数及有限 Vandermonde 恒等式 $\sum_{j=0}^n \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{n-j} = \binom{\alpha+\beta}{n}$ 按连续性推广. 证明唯一性时, 对两个候选根 y, z 分解 $y^m - z^m$, 并证明第二个因子的赋值为 1.

- (17) 对数、指数与群同构(选做). 记 $D = \{x \in K : |x| < R\}, 1+D = \{1+x : x \in D\}$.

- (i) 证明 D 对加法、 $1+D$ 对乘法各构成群, 并证明对 $x, y \in D, \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. 应说明乘积中的二重级数为何可以按总次数分组.
- (ii) 证明 $\log(\exp x) = x, \exp(\log(1+x)) = 1+x (x \in D)$. 由此证明 $\exp : (D, +) \rightarrow (1+D, \cdot)$ 是群同构, 且 $|\exp(x) - \exp(y)| = |x - y|$.
- (iii) 当 $K = \mathbb{Q}_p$ 时, 证明 p 为奇数时 $D = p\mathbb{Z}_p$, 而 $p = 2$ 时 $D = 4\mathbb{Z}_2$, 从而写出相应的群同构.

提示: 第一问令 $q = \max\{|x|, |y|\} < R$, 用 $|x^m y^n / (m!n!)| \leq (q/R)^{m+n}$ 控制高总次数的项. 第二问可使用形式恒等式 $L(E(X) - 1) = X, E(L(X)) = 1 + X$, 其中 L, E 如第 15 题. 要使代入合法, 对 $0 \neq x \in D$, 先在完备的 $K\langle T \rangle$ 中证明

$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} (E(xT) - 1)^n / n$ 与 $\sum_{n \geq 0} L(xT)^n / n!$ 收敛. 内层级数的常数项为零, 每个 T^d 的系数只涉及有限项, 故可比较形式系数; 最后令 $T = 1$.

参考文献与延伸阅读

- [1] CONRAD B. Several Approaches to Non-Archimedean Geometry[G/OL]// SAVITT D, THAKUR D S. University Lecture Series: p -adic Geometry: vol. 45. American Mathematical Society, 2008: 9-63 [2026-08-11].
<https://math.stanford.edu/~conrad/papers/aws.pdf>. DOI: 10.1090/ulect/045/02.
- [2] CONRAD K. Infinite Series in p -adic Fields[EB/OL]. [2026-09-15].
<https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/gradnumthy/infseriespadic.pdf>.