

1.2 第 2 讲 环同态、有限域与 Banach 代数

1.2.1 子环与环同态

定义 1.30. 设 A 是环. 子集 $B \subseteq A$ 称为 A 的子环, 若 $0, 1 \in B$, 并且 B 对加法、加法逆元和乘法封闭. 此时 B 对 A 中的运算本身成为环.

例如 $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ 都是子环的包含关系. 对非空集合 X 和环 A , 函数环 A^X 中的常值函数组成一个子环.

定义 1.31. 环之间的映射 $\varphi: A \rightarrow B$ 称为环同态, 若对所有 $a, a' \in A$, 都有

$$\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a') \quad \varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a')$$

以及 $\varphi(1) = 1$. 若 φ 还是双射, 则称它为环同构.

环同态自动满足 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ 和 $\varphi(a^n) = \varphi(a)^n$. 若 a 是单位, 则 $\varphi(a)$ 也是单位, 且 $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

定义 1.32. 环同态 $\varphi: A \rightarrow B$ 的核(kernel)与像(image)分别定义为

$$\ker \varphi = \{a \in A : \varphi(a) = 0\} \quad \text{和} \quad \text{im } \varphi = \{\varphi(a) : a \in A\}.$$

对任意 $a, a' \in A$, 根据环同态的加法相容性, 有 $\varphi(a) = \varphi(a')$ 当且仅当 $a - a' \in \ker \varphi$; 环同态的像则是直接取集合层面的像, 但它作为 B 的子集满足仍然环的性质:

环同态 $\varphi: A \rightarrow B$ 的像 $\text{im}(\varphi)$ 是 B 的子环.

例 1.33 (整数到剩余类环). 整数的模 n 映射 $\rho_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, a \mapsto [a]$ 是满射环同态. 它的核是所有能被 n 整除的整数, 即 $n\mathbb{Z}$, 像是整个 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

例 1.34 (乘积环的投影). 映射 $\pi_A: A \times B \rightarrow A, (a, b) \mapsto a$ 是满射环同态. 它的核为 $\{0\} \times B$, 像为 A . 类似地, 第二个坐标投影的核为 $A \times \{0\}$.

1.2.2 域、特征、素域与有限域

定义 1.35. 一个非零交换环 K 称为域(field), 若它的每个非零元素都是单位.

有理数集 $\mathbb{Q}$ 、实数集 $\mathbb{R}$ 与复数集 $\mathbb{C}$ 都在乘法和加法下构成域. 整数环 $\mathbb{Z}$ 不是域, 因为 2 在其中没有逆元. 环在乘法下构成么半群, 所以一旦是域, 其非零元全体构成群.

若 p 是素数且 $[a] \neq [0]$ 属于 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, 则 $\gcd(a, p) = 1$. 由 Bézout 等式可取 $u, v \in \mathbb{Z}$ 使 $ua + vp = 1$, 从而 $[u][a] = [1]$. 因此 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是域, 记为 $\mathbb{F}_p$. 反之, 若 $n = rs$ 是合数, 其中 $1 < r, s < n$, 则 $[r], [s]$ 都非零而 $[r][s] = [0]$. 若 $[r]$ 可逆, 将此等式左乘 $[r]^{-1}$ 便会推出 $[s] = [0]$, 矛盾. 故 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是域当且仅当 n 是素数.

对任意环 A , 都有唯一的环同态 $\eta_A: \mathbb{Z} \rightarrow A, n \mapsto n1_A$. 它记录了环中将乘法幺元重复相加的结果. 无歧义的前提下, 我们常以 n 来记 n 个乘法幺元 1_A 相加得到的元素.

定义 1.36. 若存在正整数 n 使 $n1_A = 0$, 则其中最小的 n 称为 A 的特征, 记为 $\text{char}(A)$. 若不存在这样的正整数, 则约定 $\text{char}(A) = 0$. 等价地, $\ker \eta_A = \text{char}(A)\mathbb{Z}$.

命题 1.37. 域的特征或者为 0, 或者为某个素数 p .

证明. 设域 K 的特征为正整数 n . 若 $n = ab$, 其中 $1 < a, b < n$, 则 $(a1_K)(b1_K) = n1_K = 0$. 由 n 的最小性, $a1_K$ 与 $b1_K$ 均非零, 但 $a1_K$ 是域中的非零元素, 因而可逆; 等式左乘其逆元得到 $b1_K = 0$, 这与 n 的最小性矛盾. 因而 n 必为素数. $\square$

定义 1.38. 设 K 是域. 若子环 $k \subseteq K$ 对诱导的运算本身成为域, 则称 k 为 K 的子域. K 的所有子域的交称为 K 的素域.

命题 1.39. 每个域 K 都有唯一的素域, 且只有两类可能:

- 若 $\text{char}(K) = p > 0$, 则素域同构于 $\mathbb{F}_p$;
- 若 $\text{char}(K) = 0$, 则素域同构于 $\mathbb{Q}$.

证明. 任意子域都包含 1_K , 因而包含所有 $n1_K$. 在特征 $p > 0$ 时, $\{0, 1_K, \dots, (p-1)1_K\}$ 是与 $\mathbb{F}_p$ 同构的子域, 并且包含在每个子域中. 在特征 0 时, 映射 $\mathbb{Z} \rightarrow K$ 是单射; 任意子域还必须包含每个 $n1_K \neq 0$ 的逆元, 故包含子域 $\{(m1_K)(n1_K)^{-1} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} \cong \mathbb{Q}$. 这两个子域分别是所有子域的交, 因而素域存在且唯一. $\square$

只有有限多个元素的域称为有限域, 其元素个数称为该域的阶. 有限域的乘法群将域加法结构与元素个数联系起来. 先回忆有限群的 Lagrange 定理.

命题 1.40 (Lagrange 定理). 设 G 是有限群, $H \subseteq G$ 是子群. 则 $|H|$ 整除 $|G|$. 特别地, 对每个 $g \in G$ 都有 $g^{|G|} = e$.

证明. H 的左陪集将 G 分成若干个不交子集, 且每个左陪集都与 H 等势, 故 $|G| = m|H|$ 对某个正整数 m 成立. 对 g 生成的循环子群应用第一句断言, 即得 $g^{|G|} = e$. $\square$

定理 1.41. 设 K 是有限域. 则存在唯一的素数 p 和正整数 r , 使 $\text{char}(K) = p$ 且 $|K| = p^r$. 若记 $q = p^r$, 则每个 $a \in K$ 都满足 $a^q = a$. 反过来, 对每个素数 p 和正整数 r , 存在含 p^r 个元素的域, 并且任意两个这样的域都同构.

证明. 由命题 1.37, K 的特征是某个素数 p , 而它的素域是 $\mathbb{F}_p$. 把 K 视为 $\mathbb{F}_p$ -向量空间; 有限性使其维数为某个正整数 r , 一组基给出集合之间的双射 $\mathbb{F}_p^r \rightarrow K$, 故 $|K| = p^r = q$. 乘法群 $K^\times$ 有 $q-1$ 个元素; 由 Lagrange 定理, 非零元素满足 $a^{q-1} = 1$, 因而 $a^q = a$. 零元素也满足后一等式. 因此 K 的元素恰是方程 $X^q - X = 0$ 的全部根.

把多项式 $f \in k[X]$ 的根添加到 k 中生成的更大的域, 称为 f 的分裂域, 根据抽象代数的知识, 同一个多项式 f 的任意两个分裂域同构, 且该同构保持 k 中的元素不变. 因为任意阶为 p^r 的有限域也是 f 的分裂域, 根据上述唯一性, 此域必同构于 K . $\square$

含 p^r 个元素的域在同构意义下唯一, 记为 $\mathbb{F}_{p^r}$. 特别地, 不存在含 6 个元素的域.

例 1.42 (四元域). 在 $\mathbb{F}_2$ 上, 多项式 $X^2 + X + 1$ 没有根. 在它的分裂域 K 中取一个根 α , 则 $\alpha^2 = \alpha + 1$, 并且 $\alpha(\alpha + 1) = 1$. 因而 $\{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$ 对加法和乘法封闭, 两个非平凡非零元素 α 与 $\alpha + 1$ 互为逆元. 因此 K 就是四元域 $\mathbb{F}_4$.

1.2.3 代数、赋值、范数与 Banach 代数

定义 1.43. 设 K 是域. 一个 K -代数是一个环 A 连同环同态 $\iota: K \rightarrow A$, 并且 $\iota(c)a = a\iota(c)$ 对所有 $c \in K, a \in A$ 成立. 通常把 $\iota(c)$ 仍记为 c , 于是 K 中元素 (称为标量) 与环 A 中元素的乘法写成 ca . 若 A, B 是 K -代数, 则保持结构映射的环同态 $\varphi: A \rightarrow B$, 即满足 $\varphi(ca) = c\varphi(a)$ 的环同态, 称为 K -代数同态.

定义 1.44. 设 K 是域. 映射 $|\cdot|: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 称为 K 上的实值赋值, 若对任意 $a, b \in K$

$$(1) |a| = 0 \text{ 当且仅当 } a = 0$$

$$(2) |ab| = |a||b|, \text{ 且}$$

$$(3) |a + b| \leq |a| + |b|.$$

若它还满足 $|a + b| \leq \max\{|a|, |b|\}$, 则称为非阿基米德赋值.

若 $|a| = 1$ 对每个 $a \neq 0$ 成立, 就称赋值平凡; 否则称为非平凡赋值.

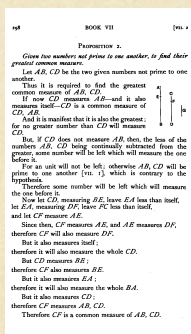
域 K 连同指定的实值赋值 $|\cdot|$ 称为赋值域, 亦记作 $(K, |\cdot|)$. 赋值给出 K 中距离

$$d(a, b) = |a - b|$$

使其称为度量空间, 并带有度量诱导的拓扑结构. 若每个关于此距离的 Cauchy 列都在 K 中收敛, 则称 K 为完备赋值域. 当赋值满足超三角不等式时, 相应地称为非阿基米德赋值域或完备非阿基米德赋值域.

例如, 复数域 $\mathbb{C}$ 配备通常的模长 $|\cdot|$ 是完备赋值域, 但不是非阿基米德赋值域.

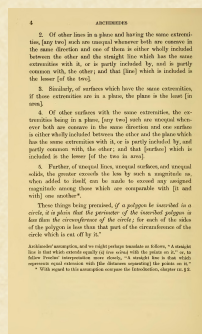
〔史略〕“非阿基米德”的来历



T. L. Heath 1908 年英译本中 Euclid 《几何原本》第 VII 卷命题 2:以辗转相除求最大公度量。



André Thevet 1584 年著作中的 Archimedes (约前 287–前 212) 刻像。



Heath 1897 年《Archimedes 著作集》第 4 页;第 5 条陈述了后来所谓的阿基米德性。

Euclid 在《几何原本》第 VII 卷记述了用于自然数的辗转相除法:不断从较大者中减去较小者的适当倍数,以逐步求出最大公因数.第 X 卷把同一反复互减算法用于线段的量(线段长度):过程若终止,最后的非零余量给出公共度量;若始终不终止,则原来的两个量不可公度.这是古希腊量论的一部分.¹

与此相关但性质不同的是《几何原本》第 V 卷定义 4 所采用的可超越性:对任意正的同类量 x, y , 总有 $n \in \mathbb{N}$ 使 $nx > y$. Archimedes 又在《论球与圆柱》中把它明确列为穷竭法的基本前提,此性质因此得名.它与辗转相除法共同依靠于同一个量作有限次重复加减的操作.

通常赋值(阿基米德情形).在 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$ 的通常绝对值下, $|\mathbb{N}|$ 无界.若 $x \neq 0$, 则 $|nx|_{\infty} = n|x|_{\infty}$:反复把 x 与自身相加,最终会越过每个给定的界.

非阿基米德情形.由超三角不等式,对每个 $n \geq 1$ 都有 $|n| = |1 + \cdots + 1| \leq 1$, 从而 $|nx| \leq |x|$. 因此自然数的像 $|\mathbb{N}|$ 有界,即自然数都在闭单位球中.

事实上,对实值赋值而言,超三角不等式恰好等价于自然数集的像有界.上面已证明一方向.反过来,若 $|n| \leq C$ 对所有 $n \geq 1$ 成立,令 $M = \max\{|a|, |b|\}$, 则二项式公式与通常的三角不等式(各二项式系数的赋值均不超过 C)给出

$$|a + b|^m \leq C(m + 1)M^m.$$

取 m 次方根并令 $m \rightarrow \infty$,便得到 $|a + b| \leq M$. 因此“非阿基米德”准确表达了一件事:赋值不再具有自然数倍数无界增长的阿基米德性质.

¹ 古希腊人区分由单位组成的离散“数”与可连续分割的“量”:线段、面积、体积等各成一类,只有同类量才可直接比较、加减或取自然数倍.对同类量 a, b 与另一对同类量 c, d , Eudoxus–Euclid 以全部正整数倍的比较来定义比例相等 $a : b = c : d$: 对任意 $m, n \in \mathbb{N}$, $ma > nb$ 的大于、等于或小于关系,必须分别与 mc 与 nd 的关系一致.这个定义不预先把 a/b 看成实数,因而同时适用于可公度量与不可公度量.若存在量 e 及正整数 m, n , 使 $a = me$, $b = ne$, 则称 a, b 可公度;否则称为不可公度.例如正方形的边长与对角线不可公度,而二者之比仍由上述倍量比较完全确定. 图源:Wikimedia Commons, Euclid VII.2, Thevet 刻像; Wikisource, Heath 1897, p. 4. 原文见 Euclid V.4–5 及 X.2.

定义 1.45. 设 $(K, |\cdot|)$ 是赋值域, A 是 K -代数. 映射 $\|\cdot\|: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 称为 A 上的范数, 若 $\|a\| = 0$ 当且仅当 $a = 0$, 并且对任意 $a, b \in A, c \in K$, 有

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|, \quad \|ca\| = |c|\|a\|, \quad \|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \quad \|1\| = 1.$$

若 A 关于距离 $d(a, b) = \|a - b\|$ 完备, 则称 A 为 Banach K -代数. 若 K 的赋值非阿基米德, 且范数还满足 $\|a + b\| \leq \max\{\|a\|, \|b\|\}$, 则称它为非阿基米德范数; 完备时称 A 为非阿基米德 Banach K -代数.

范数只要求乘法的次乘性, 不要求 $\|ab\| = \|a\|\|b\|$. 当 $K = \mathbb{C}$ 并取通常的模时, Banach K -代数简称为复 Banach 代数. 事实上, 由 Gelfand–Mazur 定理, 复交换 Banach 代数一旦满足范数乘性, 则等距同构于 $\mathbb{C}$.

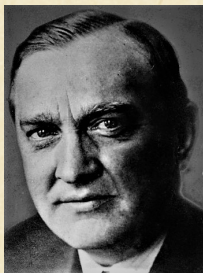
例 1.46 (连续函数的 Banach 代数). 设 X 是非空紧空间. $f \in C(X, \mathbb{C})$ 的一致范数为

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)| = \max_{x \in X} |f(x)|.$$

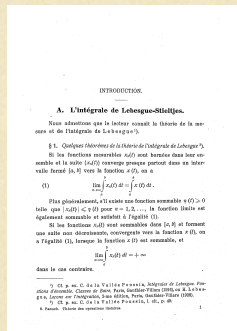
其中最大值由紧性取到. 逐点三角不等式与乘法给出范数公理, 特别地 $\|fg\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}\|g\|_{\infty}$. 若 (f_n) 是此范数下的 Cauchy 列, 则它逐点收敛到某个函数 f , 并且收敛一致; 一致极限仍连续, 故 $f \in C(X, \mathbb{C})$. 因此 $(C(X, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty})$ 是交换复 Banach 代数.

若 E 是复 Banach 空间, 则算子范数使 $\mathcal{B}(E)$ 成为非交换复 Banach 代数.

〔史略〕 Banach: 把完备性纳入结构



Stefan Banach
(1892–1945) 肖像.



Banach 1932 年专著 *Théorie des opérations linéaires* 的书影.²

二十世纪初, 积分方程、函数空间与无穷维线性算子逐渐形成共同的研究对象. Banach 是泛函分析的奠基人, 他在博士论文以及 1932 年的专著《线性算子理论》中系统研究完备赋范线性空间, 即 Banach 空间. Gelfand 于 1940 年代开启研究赋范环, 其在 Banach 空间上加入与范数相容的乘法. 现在, 数学界将此概念命名为 Banach 代数.

例 1.47 (p -进赋值). 给定素数 p , 对每个 $0 \neq x \in \mathbb{Q}$, 存在唯一的整数 n 使

$$x = p^n u/v, \quad \text{其中整数 } u, v \text{ 均不被 } p \text{ 整除.}$$

²两图来源: MacTutor, Stefan Banach; EuDML, *Théorie des opérations linéaires*.

记 $v_p(x) = n$, 称为 x 的 p -进阶, 并约定 $v_p(0) = +\infty$. 定义 $\mathbb{Q}$ 上的 p -进赋值 $|\cdot|_p$ 为

$$|x|_p = p^{-v_p(x)},$$

并约定 $p^{-\infty} = 0$. 易验证 $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$ 以及 $v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$, 所以 $|\cdot|_p$ 是非平凡的非阿基米德赋值. 因 $|p^m|_p = p^{-m} \rightarrow 0$, 说明 p 的次幂越大其“长度”越短. $\mathbb{Q}$ 关于 $|\cdot|_p$ 的完备化记为 $\mathbb{Q}_p$; 它是完备非阿基米德赋值域.

定义 1.48. 设 K 是非阿基米德赋值域. 记

$$K^\circ = \{a \in K : |a| \leq 1\}, \quad K^{\circ\circ} = \{a \in K : |a| < 1\}.$$

超三角不等式说明 K° 是子环, $K^{\circ\circ}$ 是 K° 的理想; 称它们分别为 K 的赋值环 (valuation ring) 与开单位球 (open unit ball); 后者是前者的理想. 若存在 $\pi \in K$ 使 $0 < |\pi| < 1$ 且 $|K^\times| = \{|\pi|^n : n \in \mathbb{Z}\}$, 则称 K 为离散赋值域, 称 π 为一致化元. 此时 $K^{\circ\circ} = \pi K^\circ$.

例 1.49 (赋值环的单位). 设 K 是非阿基米德赋值域. 元素 $a \in K^\circ$ 是 K° 中的单位, 当且仅当 $|a| = 1$. 事实上, 若 $|a| = 1$, 则 $|a^{-1}| = 1$, 所以 $a^{-1} \in K^\circ$; 反之, 若 $a, a^{-1} \in K^\circ$, 则 $|a| \leq 1$ 与 $|a|^{-1} \leq 1$ 迫使 $|a| = 1$.

若赋值非平凡, 则存在 $x \in K^\times$ 使 $|x| \neq 1$. 必要时以 x^{-1} 代替 x , 可取到满足 $0 < |\varpi| < 1$ 的元素 ϖ . 它是 K° 中的非零非单位. 因此 K° 不是域.

对 $K = \mathbb{Q}_p$, 一致化元可取 p . 它的赋值环称为 p -进整数环, 并记为 $\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p \leq 1\} = \mathbb{Q}_p^\circ$. 于是 $\mathbb{Q}_p^{\circ\circ} = p\mathbb{Z}_p$, 并且 $\mathbb{Z}_p^\times = \{a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p = 1\}$.

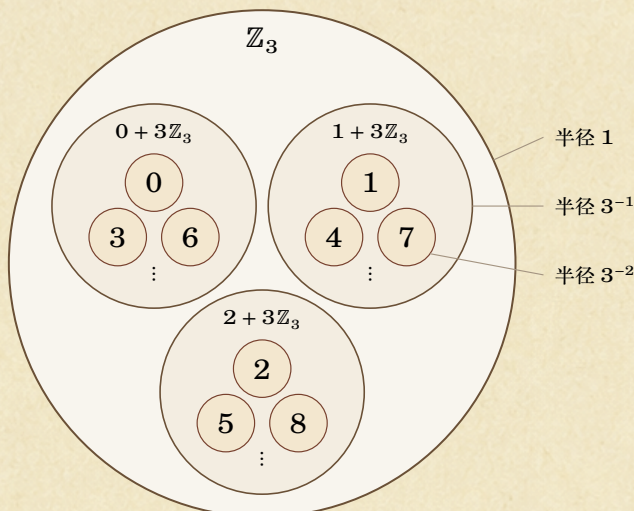
〔思路〕 p -进整数环: 无限分裂的小球

对 $a \in \mathbb{Z}_p$ 与 $n \geq 0$, 同余类 $a + p^n\mathbb{Z}_p$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 中半径 p^{-n} 的闭球

$$a + p^n\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x - a|_p \leq p^{-n}\}$$

由于 p -进赋值只取离散值, 这个闭球也是开集. 它分裂成 p 个互不相交的更小球:

$$a + p^n\mathbb{Z}_p = \coprod_{j=0}^{p-1} (a + jp^n + p^{n+1}\mathbb{Z}_p).$$



图中取 $p = 3$. 第三层标出的数字 r 表示球 $r + 9\mathbb{Z}_3$; 每个球在下一层继续分成三个半径更小的球.

由超三角不等式, 任意两球或者不交, 或者是包含关系(较小球由较大者分裂得来). 全体 $a + p^n\mathbb{Z}_p$ 构成 $\mathbb{Z}_p$ 的拓扑基, 所以每个开集都是这类球的并. 等价地, 一个 p -进整数由相容的剩余类 $a_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 唯一确定, 也可唯一写成

$$a_0 + a_1p + a_2p^2 + \cdots,$$

其中 $0 \leq a_i < p$. 固定前 n 位数字, 正是选定一个球 $a + p^n\mathbb{Z}_p$.

每个球的补集是同层其余有限多个球的并, 故既开又闭. 若两点不同, 某一层的不相交球会分开它们, 所以 $\mathbb{Z}_p$ 是完全不连通的(任意点所在的连通分支仅为它本身). 此外, 每一层只有有限多个球, 故 $\mathbb{Z}_p$ 全有界; 它又完备, 因而是紧空间.

下例类似于 p -进整数 $\mathbb{Z}_p$ 的幂级数构造, 但更具函数风味.

例 1.50 (刚性闭单位圆盘的函数环). 设 K 是完备非阿基米德赋值域. 一元 Tate 代数

$$K\langle T \rangle = \{f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0\}$$

由系数收敛于 0 的形式幂级数组成. 首先说明它是 K -代数. 只需验证 $K\langle T \rangle$ 在加法和乘法下封闭: 若 $f = \sum a_n T^n$, $g = \sum \beta_n T^n$, 则 $f + g$ 的系数满足 $|a_n + \beta_n| \leq \max(|a_n|, |\beta_n|) \rightarrow 0$; 乘积的 T^n 系数为 $\gamma_n = \sum_{i=0}^n a_i \beta_{n-i}$. 记 $A = \max_i |a_i|$, $B = \max_i |\beta_i|$. 给定 $\varepsilon > 0$, 可取 N 使得当 $i \geq N$ 时, $|a_i| < \varepsilon / \max\{1, B\}$ 且 $|\beta_i| < \varepsilon / \max\{1, A\}$. 若 $n \geq 2N$, 则对每个 $0 \leq i \leq n$, i 与 $n-i$ 至少有一个不小于 N . 因此

$$|\gamma_n| \leq \max_{0 \leq i \leq n} |a_i \beta_{n-i}| < \varepsilon.$$

故 $\gamma_n \rightarrow 0$, 乘法确实封闭于 $K\langle T \rangle$. 我们在 $K\langle T \rangle$ 上考虑 Gauß 范数 $\|f\|_G := \max_n |a_n|$

满足

$$\|f + g\|_G \leq \max\{\|f\|_G, \|g\|_G\}, \quad \|fg\|_G = \|f\|_G \|g\|_G.$$

乘法性的等号还需说明. 先设 $f, g \neq 0$. 由于两列系数都趋于零, 在达到相应最大值的指标中分别有最大者 r, s , 使得 $|\alpha_r| = \|f\|_G$ 且 $|\beta_s| = \|g\|_G$. 在 $\gamma_{r+s} = \sum_{i+j=r+s} \alpha_i \beta_j$ 中, $\alpha_r \beta_s$ 的绝对值为 $\|f\|_G \|g\|_G$. 对其余项分两种情形. 当 $i > r$ 时, $|\alpha_i| < \|f\|_G$; 当 $i < r$ 时, 必有 $j > s$. 因而 $|\beta_j| < \|g\|_G$. 因此 $\alpha_r \beta_s$ 是唯一绝对值最大的项, 由超三角不等式

$$|\gamma_{r+s}| = |\alpha_r \beta_s| = \|f\|_G \|g\|_G.$$

另一方面, 卷积公式对每个 n 给出 $|\gamma_n| \leq \|f\|_G \|g\|_G$. 故 $\|fg\|_G \leq \|f\|_G \|g\|_G$. 两式合起来即得乘法性; $f = 0$ 或 $g = 0$ 时结论直接成立. 它因而是非阿基米德代数范数. 再设 $f_j = \sum_{n \geq 0} \alpha_{j,n} T^n$ 是 Cauchy 列. 对每个 n , 有 $|\alpha_{j,n} - \alpha_{k,n}| \leq \|f_j - f_k\|_G$, 故 $(\alpha_{j,n})_j$ 在 K 中收敛; 记其极限为 α_n . 给定 $\varepsilon > 0$, 取 j_0 使得当 $j, k \geq j_0$ 时 $\|f_j - f_k\|_G < \varepsilon/2$. 令 $k \rightarrow \infty$, 得到 $|\alpha_{j,n} - \alpha_n| \leq \varepsilon/2$, 且此估计与 n 无关. 再取 N 使 $n \geq N$ 时 $|\alpha_{j_0,n}| < \varepsilon/2$, 则

$$|\alpha_n| \leq \max\{|\alpha_n - \alpha_{j_0,n}|, |\alpha_{j_0,n}|\} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

故 $\alpha_n \rightarrow 0$. 同一估计还给出 $\|f_j - \sum_{n \geq 0} \alpha_n T^n\|_G \leq \varepsilon/2$, 所以 $f_j \rightarrow f := \sum_{n \geq 0} \alpha_n T^n$ 于 Gauß 范数. 因此 $K\langle T \rangle$ 是交换非阿基米德 Banach K -代数.

现在构造一类 $K\langle T \rangle$ 到 K 的同态. 取 $a \in K$ 且 $|a| \leq 1$. 对每个 $f = \sum_{n \geq 0} \alpha_n T^n \in K\langle T \rangle$, 级数 $\sum_{n \geq 0} \alpha_n a^n$ 收敛, 因为 $|\alpha_n a^n| \leq |\alpha_n| \rightarrow 0$. 因而 $T \mapsto a$ 给出取值同态

$$\text{ev}_a : K\langle T \rangle \rightarrow K, \quad f \mapsto f(a) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n a^n, \quad |f(a)| \leq \|f\|_G.$$

由逐系数加法与卷积乘法的定义, 这是一个 K -代数同态. 为计算其核, 令

$$q_a(T) = \sum_{m \geq 0} d_m T^m, \quad d_m = \sum_{n \geq m+1} \alpha_n a^{n-1-m}.$$

每个 d_m 都有定义, 并且 $|d_m| \leq \sup_{n \geq m+1} |\alpha_n| \rightarrow 0$, 故 $q_a(T) \in K\langle T \rangle$. 由 $T^n - a^n = (T - a) \sum_{m=0}^{n-1} T^m a^{n-1-m}$ 得 $f(T) - f(a) = (T - a)q_a(T)$. 因而

$$\ker(\text{ev}_a) = (T - a)K\langle T \rangle = (T - a).$$

元素 T 不是单位, 因为 Tg 的常数项对任意 g 都是零; 故 $K\langle T \rangle$ 不是域. 后续我们会讨论到, 在刚性解析几何中, 它是闭单位圆盘的函数代数.

〔史略〕 Gauß 范数名称的由来

“Gauß 范数”的原型,是 Gauß 在 1801 年《算术研究》第 42 条中证明的多项式系数引理:两个首一有理系数多项式的乘积若具有整数系数,则两个因子本身也有整数系数.其现代形式可用多项式的容积(content)表述.对整系数多项式

$$0 \neq f = \sum_i a_i T^i \in \mathbb{Z}[T]$$

将各系数的正最大公因数记为 $c(f)$,则 Gauß 引理给出 $c(fg) = c(f)c(g)$;等价地,系数最大公因数为 1 的多项式(称作本原多项式)在乘法下封闭.

固定素数 p ,上述关于容积的定义可改写成 p -进版本

$$v_G(f) := \min_i v_p(a_i) = v_p(c(f)), \quad \|f\|_G := p^{-v_G(f)} = \max_i |a_i|_p.$$

于是容积的乘法公式正好变为 $\|fg\|_G = \|f\|_G \|g\|_G$. 在一般非阿基米德赋值域上,系数最大范数沿用这一思想.当 K 完备时,截断多项式在该范数下收敛;因此 $K\langle T \rangle$ 正是 $K[T]$ 关于 Gauß 范数的完备化,该范数也随之延拓.^a

^a历史原文见 C. F. Gauß, *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801, art. 42. 现代非阿基米德表述可参见 Brian Conrad, *Several Approaches to Non-Archimedean Geometry*, §1.1.

习题

- (1) 验证包含映射 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ 与剩余类映射 $\rho_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 都是环同态,并计算它们的核与像.
- (2) 设 $\varphi: A \rightarrow B$ 是环同态. 证明 $\varphi(0) = 0$ 、 $\varphi(-a) = -\varphi(a)$, 并证明单位的像仍为单位.
- (3) 计算 $\mathbb{Q}$ 、 $\mathbb{R}$ 、 $\mathbb{C}$ 、 $\mathbb{F}_p$ 、 $\mathbb{F}_p(t)$ 与 $M_n(\mathbb{F}_p)$ 的特征.
- (4) 设 K 是域. 直接验证 K 的所有子域的交仍是子域,并由此再证 K 的素域唯一.
- (5) 设 K 是含 q 个元素的有限域. 证明多项式恒等式 $X^q - X = \prod_{a \in K} (X - a)$ 在 $K[X]$ 中成立.
- (6) 在四元域 $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$ 中,使用 $\alpha^2 = \alpha + 1$ 写出加法表与乘法表,并验证每个非零元素的三次方都是 1.
- (7) 证明对任意域 K , 对角映射 $K \rightarrow M_n(K)$ 、 $c \mapsto cI_n$ 使 $M_n(K)$ 成为 K -代数. 当 $n \geq 2$ 时,写出两个不交换的矩阵.
- (8) 证明 p -进赋值满足超三角不等式,并计算 $|p^3 + p^5|_p$ 与 $|p^{-2} + 1|_p$.

- (9) 对每个 $n \geq 0$, 证明 $a + p^n \mathbb{Z}_p$ 是既开又闭的球, 并验证它恰分解为 p 个形如 $a + jp^n + p^{n+1} \mathbb{Z}_p$ 的互不相交子球. 进而证明这些球构成 $\mathbb{Z}_p$ 的拓扑基.
- (10) 设 K 是非阿基米德赋值域. 证明 K° 是子环, $K^{\circ\circ}$ 是 K° 的理想, 并证明 $(K^\circ)^\times = \{a \in K : |a| = 1\}$.
- (11) 设 K 的赋值非平凡. 证明 K° 不是域; 若 K 是离散赋值域且 π 是一致化元, 证明 $K^{\circ\circ} = \pi K^\circ$.
- (12) 设 X 是紧空间. 证明一致范数满足 $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$, 并说明常值函数 1 是 $C(X, \mathbb{C})$ 的乘法幺元.
- (13) 设 E 是 Banach 空间. 证明算子范数满足 $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$. 再在 $E = \mathbb{C}^2$ 上给出两个不交换的有界算子.
- (14) 在一元 Tate 代数中, 证明两个严格收敛级数的卷积系数仍趋于零, 并证明 Gauß 范数满足次乘性.
- (15) 设 $f \in K\langle T \rangle$ 且 $\|f\|_G < 1$. 证明级数 $\sum_{m \geq 0} f^m$ 在 Gauß 范数下收敛, 并由此证明 $1 - f$ 是单位.
- (16) 证明截断多项式 $\sum_{n=0}^N a_n T^n$ 在 Gauß 范数下收敛到 $\sum_{n \geq 0} a_n T^n$. 因而 $K[T]$ 在 $K\langle T \rangle$ 中稠密.
- (17) 对每个 $n \geq 0$, 证明取第 n 个系数的映射 $K\langle T \rangle \rightarrow K$ 是有界 K -线性映射, 并求其算子范数.
- (18) 设 $a \in K$ 且 $|a| \leq 1$. 证明对每个 $f = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in K\langle T \rangle$, 级数 $\sum_{n \geq 0} a_n a^n$ 收敛, 并证明由此得到的求值映射范数不超过 1.