

交换代数

第 3 讲讲义

郭宁

2026 年 9 月

1.3 第3讲 整环、商环、极大理想与谱

1.3.1 零因子与整环

定义 1.51. 设 A 是交换环. 非零元素 $a \in A$ 称为零因子, 若存在非零元素 $b \in A$ 使 $ab = 0$. 一个非零交换环称为整环 (*integral domain*), 若它没有零因子.

整数环 $\mathbb{Z}$ 是整环: 两个非零整数的乘积仍非零. 相反, 若 A, B 都非零, 则乘积环中

$$(1, 0)(0, 1) = (0, 0),$$

故 $A \times B$ 不是整环. 同样地, 在 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 中, $f(x) = \max\{1 - 3x, 0\}$ 与 $g(x) = \max\{3x - 2, 0\}$ 都非零, 但 $fg = 0$.

命题 1.52. 每个域都是整环. 每个只有有限多个元素的整环都是域.

证明. 设 K 是域, 且 $ab = 0, a \neq 0$. 在等式两边乘以 a^{-1} , 得到 $b = 0$, 故 K 没有零因子.

再设 A 是有限整环, 且 $0 \neq a \in A$. 映射 $A \rightarrow A, x \mapsto ax$ 是单射: 若 $ax = ay$, 则 $a(x - y) = 0$, 整环条件给出 $x = y$. 有限集到自身的单射必为满射, 所以存在 $x \in A$ 使 $ax = 1$. 因而每个非零元素可逆, A 是域. $\square$

命题 1.53. 设 A 是非零交换环. 单位不可能是零因子. 交换环 A 的零理想 (0) 是素理想, 当且仅当 A 是整环.

证明. 若 a 是单位且 $ab = 0$, 在等式两边乘以 a^{-1} 得 $b = 0$. 对第二句, 零理想为真理想恰好说明 $A \neq 0$, 而素性条件正是 $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ 或 $b = 0$, 即 A 没有零因子. $\square$

第二讲构造的 Tate 代数也给出整环. 若 $f = \sum a_n T^n$ 与 $g = \sum b_n T^n$ 非零, 取最低次非零项 $a_r T^r$ 与 $b_s T^s$, 则 fg 的最低次非零项为 $a_r b_s T^{r+s}$, 从而 $fg \neq 0$. 因此 $K\langle T \rangle$ 是整环; 但 T 不是单位, 所以它不是域.

1.3.2 生成理想与基本例子

例如 $2\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的理想, 但作为 $\mathbb{Q}$ 的加法子群并不是 $\mathbb{Q}$ 的理想, 因为 $(1/2) \cdot 2 = 1 \notin 2\mathbb{Z}$. 它不含 1, 故也不是 $\mathbb{Z}$ 的子环.

例 1.54 (连续函数在一点的取值). 设 X 是紧空间, $x_0 \in X$, 并令 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 求值映射 $\text{ev}_{x_0} : C(X, \mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}, f \mapsto f(x_0)$ 是满射环同态, 因为每个标量都由相应的常值函数得到. 它的核是

$$I_{x_0} = \{f \in C(X, \mathbb{F}) : f(x_0) = 0\}.$$

这个集合是理想: 两个在 x_0 处消失的函数之和仍在那里消失, 而任意连续函数乘以其中一个后仍在那里消失. 从泛函分析看, 估计 $|f(x_0)| \leq \|f\|_\infty$ 还说明求值映射连续, 因而 I_{x_0} 是闭子空间.

例 1.55 (域中没有非平凡理想). 设 K 是域, $I \subseteq K$ 是非零理想. 取 $0 \neq x \in I$. 因为 $x^{-1} \in K$ 且理想吸收环中元素的乘法, 所以 $1 = x^{-1}x \in I$. 于是每个 $a = a \cdot 1$ 都属于 I , 故 $I = K$. 因此域的理想只有 (0) 与 K .

定义 1.56. 设 $S \subseteq A$. 包含 S 的最小理想称为 S 生成的理想, 记为 (S) . 它由所有有限和 $a_1s_1 + \cdots + a_rs_r$ 组成, 其中 $a_i \in A, s_i \in S$. 对有限集合 $S = \{s_1, \dots, s_r\}$, 简记为 $(s_1, \dots, s_r)$. 当 $S = \{s\}$ 时, 这与主理想 $(s) = \{as : a \in A\}$ 一致. 当 S 为空集时, 允许取空和 0 , 于是 $(S) = (0)$.

对一族理想 $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, 记 $\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ 为所有 I_λ 的并生成的理想. 对理想 $I, J \subseteq A$, 记 IJ 为所有 $ij (i \in I, j \in J)$ 生成的理想. 这两个理想分别称为该理想族的和与 I, J 的积.

例 1.57 (在一点消失的多项式). 设 K 是域, $a \in K$. 代入映射 $\text{ev}_a : K[t] \rightarrow K, f(t) \mapsto f(a)$ 是满射环同态. 一元多项式的余式定理给出 $f(t) = (t - a)q(t) + f(a)$. 因而 $f(a) = 0$ 当且仅当 $t - a$ 整除 $f(t)$, 即 $\ker(\text{ev}_a) = (t - a)$. 这个例子把几何条件“函数在 a 点取零”写成了一个由 $t - a$ 生成的理想.

例 1.58 (Tate 代数在闭圆盘的取值). 设 K 是完备非阿基米德赋值域, 其赋值非平凡, 并设 $a \in K$ 且 $|a| \leq 1$. 对 $f = \sum_{n \geq 0} c_n T^n \in K\langle T \rangle$, 级数 $f(a) = \sum_{n \geq 0} c_n a^n$ 收敛. 因此 $\text{ev}_a : K\langle T \rangle \rightarrow K, f \mapsto f(a)$ 是满射环同态.

它的核仍是主理想 $(T - a)$. 为了直接看出这一点, 令

$$b_m = \sum_{n > m} c_n a^{n-1-m} \quad (m \geq 0).$$

完备性保证每个 b_m 有定义, 而超三角不等式给出 $|b_m| \leq \sup_{n > m} |c_n| \rightarrow 0$. 因而 $g = \sum_{m \geq 0} b_m T^m$ 属于 $K\langle T \rangle$, 逐系数计算得到 $f(T) - f(a) = (T - a)g(T)$. 所以 $f(a) = 0$ 当且仅当 $f \in (T - a)$. 在刚性解析语言中, 这个理想记录闭单位圆盘上的 K -有理点 a .

例 1.59 (整数环中的生成理想). 在 $\mathbb{Z}$ 中, $(6, 15) = (3)$. 一方面 6 与 15 都是 3 的倍数, 所以 $(6, 15) \subseteq (3)$; 另一方面 $3 = 15 - 2 \cdot 6$, 所以 $3 \in (6, 15)$. 类似地, (a, b) 由 a, b 的最大公因数生成.

命题 1.60. 若 $\varphi: A \rightarrow B$ 是环同态, 则它的核是 A 的理想, 像是 B 的子环; 它是单射当且仅当核为 (0) .

证明. 核对加法和加法逆元封闭, 因为 φ 保持加法. 若 $x \in \ker \varphi, a \in A$, 则 $\varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) = 0$, 所以 $ax \in \ker \varphi$. 因而核是理想. 像含 $0, 1$, 并对加法、加法逆元和乘法封闭, 所以是子环. 最后, $\varphi(a) = \varphi(a')$ 当且仅当 $a - a' \in \ker \varphi$, 这给出单射判据. $\square$

命题 1.61. 理想 $I \subseteq A$ 是真理想, 当且仅当 $1 \notin I$.

证明. 若 $1 \in I$, 则每个 $a = a \cdot 1$ 都属于 I , 故 $I = A$. 反向结论立即成立. $\square$

1.3.3 商环与第一同构定理

设 $I \subseteq A$ 是理想. 对 $a \in A$, 记 $a + I = \{a + x : x \in I\}$. 这些集合是加法群 A 关于子群 I 的陪集.

关系 $a \sim b \iff a - b \in I$ 是等价关系, 并且与加法和乘法相容. 其等价类就是陪集 $a + I$; 特别地, $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 对应于 $I = 12\mathbb{Z}$.

定义 1.62. 全体陪集组成的集合记为 A/I . 在其上定义 $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$ 与 $(a + I)(b + I) = ab + I$. 由此得到的环称为 A 对理想 I 的商环. 映射 $q: A \rightarrow A/I, a \mapsto a + I$ 称为商映射.

理想的乘法吸收性保证乘法定义良好. 若 $a - a' \in I, b - b' \in I$, 则 $ab - a'b' = a(b - b') + b'(a - a') \in I$, 故 $ab + I = a'b' + I$. 加法的验证只需 I 是加法子群. 商映射是满射环同态, 并且 $\ker q = I$.

例 1.63 (离散赋值环的剩余域). 设 K 是完备离散赋值域, K° 是它的赋值环, 并取一致化元 π . 由 $K^\circ = \pi K^\circ$, 集合 πK° 是 K° 的理想. 商环 $\tilde{K} = K^\circ / \pi K^\circ$ 实际上是域, 称为 K 的剩余域.

事实上, 若 $a + \pi K^\circ \neq 0$, 则 $a \notin \pi K^\circ$, 离散性迫使 $|a| = 1$. 因而 $a^{-1} \in K^\circ$, 并且 $(a + \pi K^\circ)(a^{-1} + \pi K^\circ) = 1 + \pi K^\circ$. 对 $K = \mathbb{Q}_p$, 可取 $K^\circ = \mathbb{Z}_p, \pi = p$, 于是 $\mathbb{Z}_p / p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{F}_p$.

例 1.64 (整数的商环). 取 $A = \mathbb{Z}, I = n\mathbb{Z}$. 陪集 $a + n\mathbb{Z}$ 只由 a 除以 n 所得的余数决定, 因此这个商环与以整数剩余类构造的环相同.

例 1.65 (乘积环的商). 在 $A \times B$ 中, $I = \{0\} \times B$ 是理想. 映射 $(A \times B)/I \rightarrow A, (a, b) + I \mapsto a$ 是环同构.

例 1.66 (商环可以产生新的零因子). 设 K 是域, 并在 $K[t]$ 中取理想 (t^2) . 每个陪集都有唯一的形如 $a + bt + (t^2)$ 的代表, 其中 $a, b \in K$. 记 $\varepsilon = t + (t^2)$. 则 $\varepsilon \neq 0$, 但 $\varepsilon^2 = t^2 + (t^2) = 0$. 因此 $K[t]/(t^2)$ 不是整环, 尽管 $K[t]$ 是整环. 其乘法可直接写成

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = ac + (ad + bc)\varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 0.$$

这说明取商会强迫理想中的元素变成零, 并可能由此产生零因子.

定理 1.67 (环的第一同构定理). 设 $\varphi: A \rightarrow B$ 是环同态. 则映射

$$A/\ker \varphi \longrightarrow \operatorname{im} \varphi, \quad a + \ker \varphi \mapsto \varphi(a)$$

是环同构.

证明. 若 $a - a' \in \ker \varphi$, 则 $\varphi(a) = \varphi(a')$, 所以映射定义良好. 它保持加法、乘法与幺元, 并且按像的定义为满射; 其核恰为零陪集, 故亦为单射. $\square$

第一同构定理把 φ 分解为商映射 $A \rightarrow A/\ker \varphi$ 、同构 $A/\ker \varphi \cong \operatorname{im} \varphi$ 以及子环嵌入 $\operatorname{im} \varphi \hookrightarrow B$.

例 1.68 (代入映射给出的商环). 对前面的代入映射 $\operatorname{ev}_a: K[t] \rightarrow K$ 应用第一同构定理, 得到 $K[t]/(t - a) \cong K$. 这个同构把多项式的陪集送到它在 a 点的值; 在商环中, t 与常数 a 已经相等.

复数域也可用同样的方法得到. 映射 $\operatorname{ev}_i: \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{C}, f(t) \mapsto f(i)$ 的像包含所有 $a + bi$, 故为整个 $\mathbb{C}$. 用 $t^2 + 1$ 除任意实系数多项式, 余式形如 $a + bt$. 若原多项式在 i 处取零, 则 $a + bi = 0$, 从而 $a = b = 0$. 所以核为 $(t^2 + 1)$, 第一同构定理给出 $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1) \cong \mathbb{C}$.

例 1.69 (连续函数的商环与商范数). 对求值映射 $\operatorname{ev}_{x_0}: C(X, \mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$ 应用第一同构定理, 得到 $C(X, \mathbb{F})/I_{x_0} \cong \mathbb{F}$. 这个同构还有精确的范数含义. 若在左端取商范数, 则

$$\|f + I_{x_0}\|_q = \inf_{h \in I_{x_0}} \|f + h\|_\infty = |f(x_0)|.$$

下界来自 $\|f + h\|_\infty \geq |(f + h)(x_0)| = |f(x_0)|$; 反向则取与 f 同陪集的常值函数 $f(x_0)$. 因而该环同构同时是 Banach 空间的等距同构. 这说明第一同构定理与泛函分析中的“先模去核, 再识别像”具有相同的代数骨架.

例如对 $\rho_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 应用定理, 得到 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \operatorname{im} \rho_n$; 这恢复了剩余类环的商环描述. 对乘积投影应用定理, 则得到 $(A \times B)/(\{0\} \times B) \cong A$.

1.3.4 极大理想

定义 1.70. 设 A 为环, $I \subseteq A$ 为真理想. 若 $I \subseteq J \subseteq A$ 只能推出 $J = I$ 或 $J = A$, 则称 I 为极大理想. 换言之, 极大理想是真理想中关于包含关系极大的成员.

素理想要求乘积落入理想时至少有一个因子也落入理想; 极大理想要求再扩大一步便得到整个环. 这两种条件都可在商环中直接辨认.

命题 1.71 (商环判据). 设 $I \subseteq A$ 为真理想. 则 I 是素理想, 当且仅当 A/I 是整环; I 是极大理想, 当且仅当 A/I 是域.

证明. 在 A/I 中, $(a + I)(b + I) = 0 + I$ 等价于 $ab \in I$. 因而 A/I 没有非零零因子, 当且仅当 $ab \in I$ 蕴含 $a \in I$ 或 $b \in I$.

若 I 极大且 $a + I \neq 0 + I$, 则 $a \notin I$, 所以严格包含 I 的理想 $I + (a)$ 只能等于 A . 于是存在 $i \in I$ 与 $b \in A$, 使 $i + ba = 1$. 在商环中便有 $(b + I)(a + I) = 1 + I$, 故 A/I 是域. 反过来, 若 A/I 是域且 $I \subseteq J \subseteq A$, 则 J/I 是 A/I 的理想. 域只有零理想和全环理想, 故 $J = I$ 或 $J = A$. $\square$

推论 1.72. 每个极大理想都是素理想.

证明. 极大理想的商环是域, 因而是整环; 再应用命题 1.71. $\square$

第一讲已经证明 $\mathbb{Z}$ 的素理想恰为 (0) 与 (p) , 其中 p 为素数. 由商环判据, (p) 都是极大理想, 而 (0) 不是; 因此 $\mathbb{Z}$ 的全部极大理想恰为 (p) , 其中 p 遍历素数. 同样, 求值同态给出的同构 $K[T]/(T - a) \cong K$ 与 $K\langle T \rangle/(T - a) \cong K$ 说明 $(T - a)$ 在相应环中都是极大理想. 例 1.54 中的 I_{x_0} 也因 $C(X, \mathbb{F})/I_{x_0} \cong \mathbb{F}$ 而极大.

下面还会用到极大理想的存在性. 偏序集中的一个子集称为全序子集, 若其中任意两个元素都可以比较. Zorn 引理断言: 若非空偏序集的每个全序子集都有上界, 则该偏序集含有极大元素.

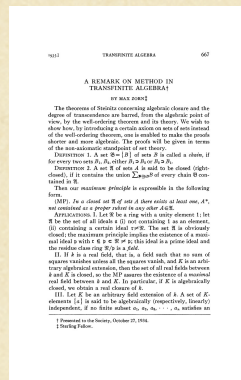
〔史略〕 Zorn 与代数中的存在性证明

1935 年, Max Zorn (1906–1993) 发表四页短文《论超限代数中的方法》, 希望简化域论中的存在性证明. Zorn 论文的第一项应用便是证明每个真理想都包含在极大理想中, 随即取商得到域; 随后又用同一原则研究域扩张中的基.

选择公理允许从任意一族非空集合中各选一个元素. 在通常的集合论中, 它与 Zorn 引理等价: 前者强调选择, 后者强调极大对象的存在.



Max Zorn 肖像



Zorn 1935 年论文 *A remark on method in transfinite algebra* 首页; 下半页的第一项应用即为极大理想的存在性.¹

命题 1.73. 每个真理想都包含在某个极大理想中.

证明. 固定真理想 I , 把所有包含 I 的真理想按包含关系排序. 这个偏序集含有 I . 若 $\mathcal{C}$ 是其中的全序子集, 则 $\bigcup_{J \in \mathcal{C}} J$ 仍是理想: 任取其中两个元素, 它们同时落在 $\mathcal{C}$ 中较大的那个理想里. 这个并仍不含 1, 故仍是真理想, 并且是 $\mathcal{C}$ 的上界. Zorn 引理给出一个极大成员, 它就是包含 I 的极大理想. $\square$

因此, 元素 $a \in A$ 不可逆, 当且仅当它属于某个极大理想. 事实上, 若 a 不可逆, 则 (a) 是真理想, 可用上面的命题; 若 a 落在真理想中, 它当然不可能可逆.

对 Banach 代数, 这个代数判据还有一个拓扑上的加强.

命题 1.74. 设 K 是赋值域, B 是 Banach K -代数. 若 $\|h\| < 1$, 则 $1 - h$ 是单位. 因而单位群 $B^\times$ 是开集; 更精确地, 若 $u \in B^\times$ 且 $\|v - u\| < \|u^{-1}\|^{-1}$, 则 $v \in B^\times$.

证明. 完备性保证几何级数 $\sum_{n \geq 0} h^n$ 收敛. 有限和与 $1 - h$ 相乘得到 $1 - h^{N+1}$, 令 $N \rightarrow \infty$ 便得到 $1 - h$ 的逆. 对给定的 u, v , 令 $h = u^{-1}(u - v)$, 则 $\|h\| < 1$ 且 $v = u(1 - h)$, 故 v 可逆. $\square$

¹图源: MacTutor, Max Zorn; American Mathematical Society. 史料参见 M. Zorn, *A remark on method in transfinite algebra*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 41 (1935), 667–670; 第 667 页说明写作动机并给出极大理想的应用, 第 667–668 页讨论域扩张中的基.

推论 1.75. 设 K 是赋值域, B 是交换 $Banach$ K -代数, $I \subseteq B$ 是理想, 并记 $\bar{I}$ 为 I 的范数闭包. 则 $\bar{I}$ 仍是理想; 若 I 是真理想, 则 $\bar{I}$ 仍是真理想. 特别地, B 的每个极大理想都是闭的.

证明. 加法以及对固定 $b \in B$ 的乘法映射 $x \mapsto bx$ 都连续, 故 $\bar{I}$ 是理想. 真理想不含单位, 而命题 1.74 说明非单位组成闭集; 因此 $\bar{I}$ 仍不含单位, 故仍为真理想. 若 $\mathfrak{m}$ 极大, 则 $\mathfrak{m} \subseteq \overline{\mathfrak{m}} \subsetneq B$, 极大性迫使 $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}$. $\square$

1.3.5 从算子谱到 Gelfand 谱

有限维线性代数用特征值检测 $T - \lambda I$ 何时不再单射. 对无限维算子, 不可逆还可能来自不满射或逆映射不连续, 因此“是否可逆”比“是否有特征向量”更稳定.

定义 1.76. 设 B 是复 $Banach$ 代数, $b \in B$. 集合

$$\sigma_B(b) = \{\lambda \in \mathbb{C} : b - \lambda 1 \text{ 在 } B \text{ 中不可逆}\}$$

称为 b 在 B 中的谱, 其补集称为预解集. 当 $B = \mathcal{B}(E)$ 且 $b = T$ 是复 $Banach$ 空间上的有界算子时, 简记为 $\sigma(T)$.

定义 1.77. 设 B 是交换复 $Banach$ 代数. 一个 $\mathbb{C}$ -代数同态 $\chi : B \rightarrow \mathbb{C}$ 称为 B 的特征标. 全体特征标组成的集合记为

$$\Delta(B) = \{\chi : B \rightarrow \mathbb{C} : \chi \text{ 是 } \mathbb{C}\text{-代数同态}\},$$

称为 B 的 Gelfand 谱.

为了从极大理想得到复数值的特征标, 需要知道相应的商域是否仍为 $\mathbb{C}$. 这里用到下面的分析结论.

Gelfand-Mazur 定理(证明略). 设 D 是非零含么复 $Banach$ 代数, 且每个非零元都可逆; 这样的代数称为复 $Banach$ 除代数 (complex $Banach$ division algebra). 则标量映射 $\mathbb{C} \rightarrow D, \lambda \mapsto \lambda 1_D$ 是等距的 $\mathbb{C}$ -代数同构. 这里无需假设 D 交换. 也就是说, 每个 $d \in D$ 都唯一写成 $\lambda 1_D$; 等距性由第二讲的范数约定 $\|\lambda 1_D\| = |\lambda| \|1_D\| = |\lambda|$ 得到.²

命题 1.78. 设 B 是交换复 $Banach$ 代数. 映射 $\chi \mapsto \ker \chi$ 给出 $\Delta(B)$ 与 B 的极大理想之间的一一对应. 对每个 $b \in B$, 还有

$$\sigma_B(b) = \{\chi(b) : \chi \in \Delta(B)\}.$$

²定理及证明可参见 András Zsák 讲授、Leonard Tomczak 整理的 *Functional Analysis*, Cambridge Part III, 2023, 推论 5.4.

证明. 特征标在常值标量上为恒等映射, 因而满射; 第一同构定理说明它的核是极大理想. 反过来, 设 $\mathfrak{m}$ 是极大理想. 由推论 1.75, $\mathfrak{m}$ 闭. 在 $D = B/\mathfrak{m}$ 上取商范数 $\|b + \mathfrak{m}\|_q = \inf_{a \in \mathfrak{m}} \|b + a\|$. 闭性保证其正定性; 对陪集的代表元计算, 再取下确界, 可得标量齐次性、三角不等式及次乘性.

这个范数是完备的. 给定 D 中的 Cauchy 列 (u_n) , 取子列 (u_{n_k}) , 使 $\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\|_q < 2^{-k-1}$. 由商范数的定义, 可逐项选取代表元 $b_k \in B$, 使 $b_k + \mathfrak{m} = u_{n_k}$ 且 $\|b_{k+1} - b_k\| < 2^{-k}$. 这些差的范数之和收敛, 故 (b_k) 是 Cauchy 列, 并在 B 中收敛. 因此 (u_{n_k}) 在 D 中收敛, 原 Cauchy 列 (u_n) 也收敛.

由商环判据, D 是非零域. 此外, $0 < \|1_D\|_q \leq 1$, 而次乘性给出 $\|1_D\|_q \leq \|1_D\|_q^2$, 故 $\|1_D\|_q = 1$. 所以 D 是复 Banach 除代数. 由 Gelfand–Mazur 定理, 每个 $b + \mathfrak{m}$ 都唯一写成 $\lambda 1_D$. 令 $\chi_{\mathfrak{m}}(b) = \lambda$, 便得到核为 $\mathfrak{m}$ 的特征标. 任何核为 $\mathfrak{m}$ 的特征标都必须把 b 映到这个 λ , 故它唯一.

最后, 若 $\lambda = \chi(b)$, 则 $b - \lambda 1 \in \ker \chi$, 所以它不可逆. 反之, 若 $b - \lambda 1$ 不可逆, 则真理想 $(b - \lambda 1)$ 包含在某个极大理想中; 取对应的特征标 χ , 便有 $\chi(b) = \lambda$. $\square$

命题 1.79. 设 B 是交换复 Banach 代数. 若 $\|bc\| = \|b\|\|c\|$ 对任意 $b, c \in B$ 成立, 则标量映射 $\mathbb{C} \rightarrow B, \lambda \mapsto \lambda 1$ 是满的等距同构.

证明. 范数的乘性说明 B 没有零因子. 令 $F = \text{Frac}(B)$ 为 B 的分式域, 并对 $b, c \in B, c \neq 0$ 定义 $\|b/c\|_F = \|b\|/\|c\|$. 交叉相乘说明这个值不依赖分式的表示, 通分后原范数的三角不等式又给出 F 上的三角不等式; 所得范数仍有乘性.

设 $\widehat{F}$ 为 F 的完备化. 乘法与标量作用连续延拓到 $\widehat{F}$, 乘性范数等式也由取极限保留. 若 $0 \neq x \in \widehat{F}$ 且 $x_n \in F$ 收敛到 x , 则舍去有限项后 $x_n \neq 0$, 且 $\|x_n\|_F$ 远离 0. 此时

$$\|x_n^{-1} - x_m^{-1}\|_F = \frac{\|x_n - x_m\|_F}{\|x_n\|_F \|x_m\|_F},$$

所以 (x_n^{-1}) 是 Cauchy 列, 其极限是 x 的逆. 因而 $\widehat{F}$ 是复 Banach 除代数. Gelfand–Mazur 定理给出 $\widehat{F} = \mathbb{C}1$. 由 $\mathbb{C}1 \subseteq B \subseteq F \subseteq \widehat{F}$ 可知 $B = \mathbb{C}1$, 而 $\|\lambda 1\| = |\lambda|$, 故所得同构等距. $\square$

在 $\Delta(B)$ 上取使每个函数 $\chi \mapsto \chi(b)$ 连续的最弱拓扑. 对 $b \in B$, 函数 $\widehat{b}(\chi) = \chi(b)$ 称为 b 的 Gelfand 变换. 命题 1.78 说明, 元素的谱正是其 Gelfand 变换的值域.

例 1.80 (连续函数代数的 Gelfand 谱). 设 X 是紧 Hausdorff 空间. 对每个 $x \in X$, 求值映射 $\chi_x: C(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(x)$ 是特征标. 反过来, 设 $\mathfrak{m}$ 是极大理想. 若其中的函数没有公共零点, 紧性给出 $f_1, \dots, f_r \in \mathfrak{m}$, 使 $\sum_{i=1}^r \overline{f_i} f_i = \sum_{i=1}^r |f_i|^2$ 处处非零. 这个函数既属于 $\mathfrak{m}$ 又是单位, 矛盾. 因而 $\mathfrak{m} \subseteq I_x$ 对某个 $x \in X$ 成立; 二者均为极大理想, 所以 $\mathfrak{m} = I_x$. 连续函数可以分离不同点, 故 x 唯一. 映射 $x \mapsto \chi_x$ 连续; 不同特征标在某个

函数上的值不同,所以 Gelfand 谱是 Hausdorff 空间. 因而这个从紧空间到 Hausdorff 空间的连续双射是同胚. 由命题 1.78,

$$\sigma_{C(X, \mathbb{C})}(f) = f(X).$$

若把 f 视为乘法算子 $M_f : g \mapsto fg$, 则 $M_f - \lambda I = M_{f-\lambda}$, 故同一等式给出 $\sigma(M_f) = f(X)$.

例 1.81 (复圆盘代数与 Tate 代数; 选读). 令 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. 复圆盘代数是

$$A(\overline{\mathbb{D}}) = \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C}) : f|_{\mathbb{D}} \text{ 全纯}\}, \quad \|f\|_{\infty} = \max_{|z| \leq 1} |f(z)|.$$

若 $f_j \in A(\overline{\mathbb{D}})$ 在闭圆盘上一致收敛到 f , 则它们在 $\mathbb{D}$ 的每个紧子集上一致收敛; Weierstraß 定理说明 $f|_{\mathbb{D}}$ 仍全纯. 因而 $A(\overline{\mathbb{D}})$ 是 $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ 的闭子代数, 所以是复 Banach 代数; 最大模原理还给出 $\|f\|_{\infty} = \max_{|z|=1} |f(z)|$.

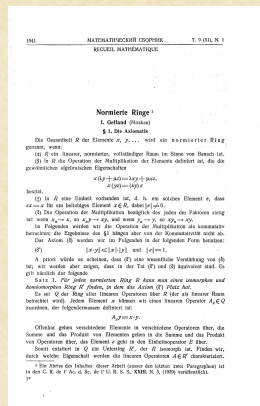
这两种闭圆盘函数代数都由多项式环完备化得到. 对 $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$, 先以 $f_r(z) = f(rz)$, $r \uparrow 1$ 一致逼近 f , 再截断 f_r 的 Taylor 级数, 可见 $\mathbb{C}[T]$ 在圆盘代数中稠密; 若 K 是完备非阿基米德赋值域, 则 $K\langle T \rangle$ 是 $K[T]$ 关于 Gauß 范数的完备化. 但两种范数并不相同: 在复圆盘上 $\|1 + T\|_{\infty} = 2$, 虽然系数绝对值的最大值为 1; 在非阿基米德情形, Gauß 范数则取系数绝对值的最大值, 所以同一个 $1 + T$ 的范数为 1.

对每个 $z \in \overline{\mathbb{D}}$, 求值 $f \mapsto f(z)$ 是范数为 1 的特征标. 反过来, 特征标 χ 满足 $|\chi(f)| \leq \|f\|_{\infty}$: 否则 $\|\chi(f)^{-1}f\|_{\infty} < 1$, 由命题 1.74, $1 - \chi(f)^{-1}f$ 可逆, 却被 χ 映到 0. 因此 χ 连续; 令 $z = \chi(T)$, 便有 $|z| \leq 1$, 再由多项式的稠密性得到 $\chi(f) = f(z)$. 因此 $z \mapsto \text{ev}_z$ 是从 $\overline{\mathbb{D}}$ 到 Gelfand 谱的双射; Gelfand 拓扑的定义表明它连续, 而逆映射 $\chi \mapsto \chi(T)$ 也连续, 故二者同胚. 对 $K\langle T \rangle$, 每个 $|a| \leq 1$ 也给出有界求值同态, 但这些 K -有理点未必决定 Gauß 范数: 在 $\mathbb{Q}_p\langle T \rangle$ 中, $\|T^p - T\|_G = 1$, 而 $a^p - a \in p\mathbb{Z}_p$ 对所有 $a \in \mathbb{Z}_p$ 成立, 故 $\sup_{a \in \mathbb{Z}_p} |a^p - a|_p \leq p^{-1}$. 这正是复圆盘与刚性闭圆盘之间最重要的差别: 前者的一致范数由经典点控制, 后者的 Gauß 范数一般不能只从 K -有理点恢复.

〔史略〕 Gelfand: 从单个元素的谱到代数的点空间



Israel Gelfand (1913–2009) 肖像

Gelfand 1941 年论文 *Normierte Ringe* 首页; 第四节研究极大理想, 第五节把代数元素视为极大理想空间上的函数.³

算子理论先把谱附着在单个算子上: 参数 λ 属于谱, 正表示 $T - \lambda I$ 不可逆. Gelfand 在 1941 年研究交换赋范环时, 把全部极大理想放进同一个空间. 对每个极大理想 $\mathfrak{m}$ 和元素 b , 商 $B/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$ 中恰有一个数 λ 满足 $b - \lambda 1 \in \mathfrak{m}$; 令 $\hat{b}(\mathfrak{m}) = \lambda$, 便把 b 变成极大理想空间上的函数. 于是单个元素的谱是 $\hat{b}$ 的值域, 而所有 $\hat{b}$ 共同反映整个代数. 这一步把“研究一个算子的不可逆参数”改写为“由整个代数恢复一个点空间及其函数”.

1.3.6 素谱与 Zariski 闭集

Gelfand 谱中的点取值于固定的域 $\mathbb{C}$, 而且特征标必为满射, 所以其核是极大理想. 对一般交换环 A , 更自然的取值允许落在任意域 L 中. 环同态 $\psi: A \rightarrow L$ 未必满射, 但其核总是素理想: 若 $ab \in \ker \psi$, 则域 L 中 $\psi(a)\psi(b) = 0$, 故 $a \in \ker \psi$ 或 $b \in \ker \psi$.

反过来, 若 $\mathfrak{p} \subset A$ 是素理想, 则 $A/\mathfrak{p}$ 是整环, 并嵌入其分式域 $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})$, 即由分式 $a/b (b \neq 0)$ 组成的域. 因而复合映射

$$A \longrightarrow A/\mathfrak{p} \longrightarrow \text{Frac}(A/\mathfrak{p})$$

的核恰为 $\mathfrak{p}$. 所以素理想正是交换环到域的同态所能产生的全部核; 极大理想对应其中满射到域的情形.

定义 1.82. 环 A 的素谱是集合

$$\text{Spec } A = \{\mathfrak{p} \subset A : \mathfrak{p} \text{ 是素理想}\}.$$

³两图来源: Kyoto Prize, Izrail Moiseevich Gelfand; Math-Net.Ru, I. Gelfand, *Normierte Ringe*, *Rec. Math. [Mat. Sbornik]* N.S. 9(51) (1941), 3–24.

对理想 $I \subseteq A$, 定义

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

称 $V(I)$ 为理想 I 的消失集; 这类集合称为 $\operatorname{Spec} A$ 的 Zariski 闭集.

若 $I = (f_1, \dots, f_r)$, 则 $\mathfrak{p} \in V(I)$ 当且仅当每个 f_j 都属于 $\mathfrak{p}$, 即它们在 $A/\mathfrak{p}$ 中的像同时为零. 这就是“消失集”一词的含义.

例 1.83 (整数环的素谱). 第一讲对素理想的分类给出

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{(0)\} \cup \{(p) : p \text{ 为素数}\}.$$

其中 (p) 都是极大理想, 而 (0) 不是. 对非零整数 n , 有 $(n) \subseteq (p)$ 当且仅当 $p \mid n$, 而 $(n) \not\subseteq (0)$. 因此 $V((n))$ 恰由整除 n 的素数点组成; 例如 $V((6)) = \{(2), (3)\}$, 而 $V((1)) = \emptyset$. 当 $n = 0$ 时, 每个素理想都包含 (0) , 所以 $V((0)) = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

习题

- (1) 验证包含映射 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ 与剩余类映射 $\rho_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 都是环同态. 再证明 Gauß 的记号 $a \equiv b \pmod{n}$ 等价于 $\rho_n(a) = \rho_n(b)$, 并计算 ρ_n 的核与像.
- (2) 设 $\varphi : A \rightarrow B$ 是环同态. 证明 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(-a) = -\varphi(a)$, 并证明单位的像仍为单位.
- (3) 证明 $\mathbb{Z}$ 的每个理想都形如 $n\mathbb{Z}$, 其中 $n \geq 0$. 提示: 对非零理想中的正整数使用良序性.
- (4) 在 $\mathbb{Z}$ 中分别计算 $(12, 18)$, $(6, 10, 15)$ 与 $(8, 12, 20)$.
- (5) 设 K 是域. 证明 K 的理想只有 (0) 与 K .
- (6) 设 $I \subseteq A$ 是理想. 证明 I 为真理想当且仅当 $1 \notin I$.
- (7) 设 $I \subseteq A$ 是理想. 证明公式 $(a + I)(b + I) = ab + I$ 与代表元的选择无关, 并证明商映射 $A \rightarrow A/I$ 的核恰为 I .
- (8) 求环 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 的全部理想, 并给出每个理想的一组生成元.
- (9) 设 $\pi_A : A \times B \rightarrow A$ 为第一坐标投影. 计算它的核与像, 并用第一同构定理证明 $(A \times B)/(\{0\} \times B) \cong A$.
- (10) 设 $\varphi : A \rightarrow B$ 为环同态, $J \subseteq B$ 为理想. 证明原像 $\varphi^{-1}(J) = \{a \in A : \varphi(a) \in J\}$ 是 A 的理想.
- (11) 说明理想在非满射环同态下的像未必是目标环的理想. 具体地, 考察包含映射 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ 和理想 $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$.

- (12) * 设正整数 m, n 互素. 证明映射 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, a \mapsto ([a], [a])$ 为满射, 核为 $mn\mathbb{Z}$. 再用第一同构定理证明 $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- (13) 在例 1.54 的记号下, 证明 I_{x_0} 是闭理想, 并证明同构 $C(X, \mathbb{F})/I_{x_0} \cong \mathbb{F}$ 关于商范数是等距的.
- (14) 补全例 1.58 的计算: 证明 $b_m \rightarrow 0$ 以及 $f(T) - f(a) = (T - a) \sum_{m \geq 0} b_m T^m$, 进而得到 $K\langle T \rangle / (T - a) \cong K$.
- (15) 在例 1.63 的记号下, 证明 πK° 是理想, 并直接证明每个非零陪集都可逆. 对 $K = \mathbb{Q}_p$ 写出所得商域.
- (16) * 取互异点 $x_1, \dots, x_r \in [0, 1]$, 并令 $\Phi(f) = (f(x_1), \dots, f(x_r))$. 证明 $\Phi : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^r$ 是满射. 提示: 使用 Lagrange 插值多项式. 计算其核, 并用第一同构定理描述相应商环.
- (17) 直接使用商环判据证明: $\mathbb{Z}$ 的极大理想恰为 (p) , 其中 p 为素数. 再列出 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 的全部极大理想.
- (18) 设 A 为环、 $a \in A$. 证明 a 不可逆, 当且仅当 a 属于某个极大理想. 指出证明中在哪一步使用了 Zorn 引理.
- (19) 设 $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. 直接研究 $T - \lambda I$ 的可逆性, 求 $\sigma(T)$. 再对一个 2×2 Jordan 块完成同样的计算.
- (20) 设 B 为交换复 Banach 代数, $\chi : B \rightarrow \mathbb{C}$ 为特征标. 证明 $\chi(b) \in \sigma_B(b)$ 对每个 $b \in B$ 成立. 再证明 $\ker \chi$ 是极大理想.
- (21) 设 X 为紧 Hausdorff 空间. 补全正文中的公共零点论证, 证明 $C(X, \mathbb{C})$ 的每个极大理想都唯一形如 $I_x = \{f : f(x) = 0\}$.
- (22) 对整数 n , 写出 $V((n)) \subseteq \text{Spec } \mathbb{Z}$. 分别说明 $n = 0, n = \pm 1$ 及 $|n| > 1$ 时的情形, 并计算 $V((12))$ 与 $V((18))$.
- (23) 设 $\varphi : A \rightarrow B$ 为环同态, $\mathfrak{q} \subset B$ 为素理想. 证明 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ 是素理想. 再用包含映射 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ 说明极大理想的原像未必极大.
- (24) 证明 p -进赋值满足超三角不等式. 计算 $|p^3 + p^5|_p, |p^{-2} + 1|_p$, 并判定等式 $|x + y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$ 的成立条件.
- (25) 设 K 是非阿基米德赋值域, 并且其赋值非平凡. 证明 $(K^\circ)^\times = \{a \in K : |a| = 1\}$, 并证明 K° 是整环但不是域.
- (26) 在一元 Tate 代数中, 直接利用超三角不等式证明两个级数的卷积系数仍趋于零. 再用最低次非零项证明 $K\langle T \rangle$ 是整环, 并说明 T 不是单位.