

2.1 第 4 讲 素谱的 Zariski 拓扑与环同态

第三讲已引出素谱, 并定义 Zariski 闭集. 本讲继续补充这套构造的环论基础: 先验证闭集公理, 再证明闭集和根理想的对应关系, 并由此计算点与任意子集的闭包. 最后从环同态所诱导的反向谱映射出发, 以扩张与收缩计算闭集的原像和像的闭包.

2.1.1 从理想到 Zariski 闭集

定义 2.1 (素谱与消失集). 环 A 的素谱是集合

$$\operatorname{Spec} A = \{\mathfrak{p} \subseteq A : \mathfrak{p} \text{ 是素理想}\}.$$

对理想 $I \subseteq A$, 令

$$V_A(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

把所有 $V_A(I)$ 规定为闭集, 所得拓扑称为 $\operatorname{Spec} A$ 上的 Zariski 拓扑.

命题 2.2 (闭集运算). 设 $I, J \subseteq A$ 为理想, $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 为任意一族理想. 则

$$V_A((0)) = \operatorname{Spec} A, \quad V_A(A) = \emptyset, \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_A(I_\lambda) = V_A\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right),$$

并且

$$V_A(I) \cup V_A(J) = V_A(IJ) = V_A(I \cap J).$$

此外, $I \subseteq J$ 蕴含 $V_A(J) \subseteq V_A(I)$.

证明. 素理想包含零理想而不含 1, 故前两个等式成立. 一个素理想包含每个 I_λ , 当且仅当它包含这些理想之和; 空族理想的和约定为 (0) .

若素理想 $\mathfrak{p}$ 包含 I 或 J , 则它包含 IJ . 反之, 若 $IJ \subseteq \mathfrak{p}$ 而 $I \not\subseteq \mathfrak{p}$, 取 $a \in I \setminus \mathfrak{p}$. 对每个 $b \in J$, 由 $ab \in \mathfrak{p}$ 及素性得到 $b \in \mathfrak{p}$, 故 $J \subseteq \mathfrak{p}$. 这证明 $V_A(IJ) = V_A(I) \cup V_A(J)$. 再由 $IJ \subseteq I \cap J$ 以及 $I \cap J \subseteq I, J$ 得到另一个等式. 最后一项直接来自包含关系的传递性. 因而这些集合满足空集、全空间、任意交与有限并公理. $\square$

2.1.2 根理想控制闭集与闭包

我们现在研究理想 I 的消失集 $V(I)$ 涉及的定义条件 $I \subseteq \mathfrak{p}$ 有何含义. 我们考虑交集 $\bigcup_{I \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$, 易验证它是一个理想. 下面我们讨论它的另一种表达形式.

定义 2.3 (根理想). 理想 $I \subseteq A$ 的根理想为

$$\sqrt{I} = \{x \in A : \text{存在 } n \geq 1 \text{ 使 } x^n \in I\}.$$

若 $I = \sqrt{I}$, 则称 I 为根理想.

先核对定义. 若 $x^m, y^n \in I$, 则 $(x+y)^{m+n-1}$ 的每一项都含因子 x^m 或 y^n , 故属于 I ; 同时 $(-x)^m \in I$ 且 $(ax)^m = a^m x^m \in I$. 因而 $\sqrt{I}$ 是包含 I 的理想. 若 $x^m \in \sqrt{I}$, 再取一次幂便有 $x^{mn} \in I$, 所以 $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$. 素理想 $\mathfrak{p}$ 还满足 $x^n \in \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \mathfrak{p}$, 故 $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$.

为联系根理想和之前的交理想 $\bigcup_{I \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$, 我们证明如下引理. 其证明类似于极大理想的存在性(根据后续知识, 它是在说环 A 关于乘性集 S 的局部化仍有极大理想).

引理 2.4 (乘法集分离). 设 $S \subseteq A$ 含 1 且对乘法封闭. 若理想 $I \subseteq A$ 满足 $I \cap S = \emptyset$, 则存在素理想 $\mathfrak{p} \supseteq I$, 使 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.

证明. 令 $\mathcal{P}$ 为所有包含 I 且与 S 不交的理想组成的偏序集, 按包含关系排序. 它含有 I . 一条链的并仍是理想: 并中的任意两个元素分别落入链的两个成员, 而二者可比较, 故它们同时落入较大的成员; 这个并仍与 S 不交, 故给出链的上界. 空链也以 I 为上界. Zorn 引理于是给出极大元 $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$. 因为 $1 \in S$, 所以 $\mathfrak{p} \neq A$.

若 $bc \in \mathfrak{p}$ 而 $b, c \notin \mathfrak{p}$, 则 $\mathfrak{p} + (b)$ 与 $\mathfrak{p} + (c)$ 都严格包含 $\mathfrak{p}$. 由极大性, 可取

$$s_1 = u + rb \in S, \quad s_2 = v + sc \in S, \quad u, v \in \mathfrak{p}, \quad r, s \in A.$$

乘法封闭性给出 $s_1 s_2 \in S$, 而 $s_1 s_2 = uv + usc + rbv + rsbc \in \mathfrak{p}$, 与 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ 矛盾. 因而 $\mathfrak{p}$ 是素理想. $\square$

定理 2.5 (根理想是素理想之交). 对任意理想 $I \subseteq A$, 有

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \\ I \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}.$$

若没有包含 I 的素理想, 右端按约定为 A .

证明. 若 $x \in \sqrt{I}$, 取 $x^n \in I$. 每个包含 I 的素理想由素性都包含 x , 故 x 属于右端. 若 $x \notin \sqrt{I}$, 则乘法集 $S = \{1, x, x^2, \dots\}$ 与 I 不交; 由引理 2.4, 有包含 I 且不含 x 的素理想, 故 x 不属于右端. 当 $I = A$ 时, 两边都是 A , 空交约定恰好涵盖这一情形. $\square$

推论 2.6 (根理想与闭集). 对理想 $I, J \subseteq A$, 有

$$V_A(I) = V_A(\sqrt{I}), \quad V_A(I) \subseteq V_A(J) \iff \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}.$$

特别地, $V_A(I) = V_A(J)$ 当且仅当 $\sqrt{I} = \sqrt{J}$. 因而根理想与 $\text{Spec} A$ 的闭子集反序一一对应.

证明. 第一式由定义显然. 若 $V_A(I) \subseteq V_A(J)$, 对两边的素理想取交, 并用定理 2.5 得到 $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$. 反向则由消失集对理想包含关系的反转得到. $\square$

命题 2.7 (子集与单点的闭包). 对任意子集 $T \subseteq \text{Spec} A$, 有

$$\overline{T} = V_A\left(\bigcap_{\mathfrak{p} \in T} \mathfrak{p}\right).$$

特别地, 对 $\mathfrak{p} \in \text{Spec} A$, 单点子集 $\{\mathfrak{p}\}$ 的闭包为

$$\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V_A(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec} A : \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}.$$

证明. 记 $K = \bigcap_{\mathfrak{p} \in T} \mathfrak{p}$. 对任意理想 $I \subseteq A$, 定义给出

$$T \subseteq V_A(I) \iff I \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in T} \mathfrak{p} = K.$$

在所有包含 T 的闭集中, $V_A(K)$ 因此最小, 即等于 $\overline{T}$. 当 $T = \emptyset$ 时, 约定 $K = A$, 公式仍给出空集. 取 $T = \{\mathfrak{p}\}$ 即得单点公式. $\square$

若 $\{\mathfrak{p}\}$ 是闭集, 则称 $\mathfrak{p}$ 为闭点. 极大理想显然给出闭点. 反之, 若素理想 $\mathfrak{p}$ 非极大, 取真理想 $\mathfrak{p} \subsetneq J \subsetneq A$; 将引理 2.4 用于 J 与 $\{1\}$, 得到素理想 $\mathfrak{q} \supseteq J$, 故 $\mathfrak{q} \in V_A(\mathfrak{p}) \setminus \{\mathfrak{p}\}$. 因此闭点恰好对应极大理想. 若 A 是整环, 则 (0) 是素理想, 且其闭包为整个 $\text{Spec} A$; 这样的稠密的点称为泛点 (generic point). 包含关系 $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ 在几何上表示 $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$.

2.1.3 两个基本例子

整数环. 根据辗转相除法, 每个理想都形如 $(n) = n\mathbb{Z}$, 其中可取 $n \geq 0$. 零理想是素理想; 若 $n \geq 2$, 则 (n) 为素理想当且仅当 n 是素数. 因而

$$\text{Spec } \mathbb{Z} = \{(0)\} \cup \{(p) : p \text{ 为正素数}\}.$$

每个 (p) 都是极大理想, 故为闭点, 而 (0) 是泛点. 若 $0 \neq n = \pm p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, 其中 p_i 互异, 则 $V_{\mathbb{Z}}((n)) = \{(p_1), \dots, (p_r)\}$. 所以 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 的真闭子集恰为有限闭点的集合.

复仿射直线. 环 $\mathbb{C}[t]$ 是整环, 所以 (0) 是素理想. 对 $\alpha \in \mathbb{C}$, 求值同态 $\text{ev}_\alpha : \mathbb{C}[t] \rightarrow \mathbb{C}$ 的核为 $(t - \alpha)$, 并且 $\mathbb{C}[t]/(t - \alpha) \cong \mathbb{C}$ 是域, 故 $(t - \alpha)$ 是极大理想. 反之, 若 $\mathfrak{p}$ 是非

零素理想, 取 $0 \neq f \in \mathfrak{p}$. 因为 $\mathfrak{p}$ 是真理想, 故 $d = \deg f \geq 1$; 由代数学基本定理可把 f 写写成线性因子的乘积 $f = c \prod_{i=1}^d (t - \alpha_i)$, 其中 $c \in \mathbb{C}^\times$. 素性迫使某 $t - \alpha_i \in \mathfrak{p}$, 而我们已经知道 $(t - \alpha_i)$ 是极大理想, 故只能有 $\mathfrak{p} = (t - \alpha_i)$. 因此 $\mathbb{C}[t]$ 的素谱为

$$\operatorname{Spec} \mathbb{C}[t] = \{(0)\} \cup \{(t - \alpha) : \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

对非零多项式 f , 其消失集由 f 的互异根所对应的闭点组成; 所以这里的真闭子集也恰为有限个闭点组成的集合.

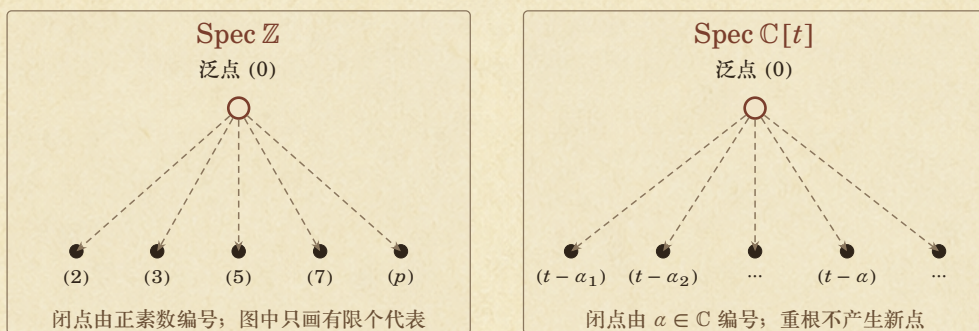


图 2.1: 两个素谱具有相似拓扑结构. 向下的虚线表示从泛点到闭点的闭包关系.

2.1.4 环同态反向诱导连续谱映射

固定环同态 $\varphi : A \rightarrow B$.

引理 2.8 (理想与素理想的原像). 若 $J \subseteq B$ 是理想, 则 $\varphi^{-1}(J)$ 是 A 的理想; 若 $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$, 则 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec} A$.

证明. 原像含 0. 若 $x, y \in \varphi^{-1}(J)$, 则 $\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) \in J$; 若 $r \in A$, 则 $\varphi(rx) = \varphi(r)\varphi(x) \in J$. 因而原像是理想.

若 $\mathfrak{q}$ 为素理想, 则保么性给出 $1_A \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. 若 $xy \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, 则 $\varphi(x)\varphi(y) \in \mathfrak{q}$, 故 x 或 y 落入原像. 所以这个原像是素理想. $\square$

因此 φ 诱导集合映射

$$\varphi^* = \operatorname{Spec}(\varphi) : \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A, \quad \mathfrak{q} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q}).$$

箭头方向反转, 是因为 A 中的函数要先经 φ 变成 B 中的函数, 才能在 B 的点上求值. 若 $\psi : B \rightarrow C$, 则 $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$, 且 $(\operatorname{id}_A)^* = \operatorname{id}_{\operatorname{Spec} A}$.

定义 2.9 (扩张与收缩). 对理想 $I \subseteq A$, 其沿 φ 的扩张是 I 的像生成的理想:

$$I^e = IB = (\varphi(I)) = \left\{ \sum_{i=1}^r b_i \varphi(a_i) : r \geq 0, b_i \in B, a_i \in I \right\}.$$

这里 $r = 0$ 时的空和约定为 0. 对理想 $J \subseteq B$, 其沿 φ 的收缩是 $J^c = \varphi^{-1}(J) \subseteq A$.

扩张是集合像 $\varphi(I)$ 在 B 中生成的理想; 像本身通常不是 B -理想, 二者不能混同.

命题 2.10 (扩张-收缩伴随). 对理想 $I \subseteq A$ 与 $J \subseteq B$, 有

$$I^e \subseteq J \iff I \subseteq J^c.$$

特别地, $I \subseteq (I^e)^c$ 且 $(J^c)^e \subseteq J$.

证明. 若 $I^e \subseteq J$, 则 $I \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(I)) \subseteq \varphi^{-1}(J) = J^c$. 反之, 若 $I \subseteq J^c$, 则 $\varphi(I) \subseteq J$; 由于 J 是理想, 它也包含 $\varphi(I)$ 生成的理想 I^e . 分别令 $J = I^e$ 与 $I = J^c$ 得两包含. $\square$

集合像与扩张的差别. 对嵌入 $\iota: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, 非零理想 (n) 的集合像仍是子集 $n\mathbb{Z}$, 但其扩张为整个 $\mathbb{Q}$, 因为

$$n \cdot \frac{1}{n} = 1, \quad n \cdot \frac{m}{nk} = \frac{m}{k} \quad (m, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0).$$

所以 $(0)^e = (0)$, 而 $n \neq 0$ 时 $(n)^e = \mathbb{Q}$. 域 $\mathbb{Q}$ 的两个理想 (0) 、 $\mathbb{Q}$ 分别收缩为 (0) 、 $\mathbb{Z}$. 特别地, $n \geq 2$ 时 $(n) \subsetneq ((n)^e)^c = \mathbb{Z}$, 说明扩张与收缩并不互为逆操作.

同一计算的谱几何. 从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Q}$ 正是把每个非零整数变成单位. 因而 $\text{Spec } \mathbb{Q}$ 的唯一一点 $\xi = (0)$ 收缩为 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 的泛点 $\eta = (0)$, 而闭点 (p) 都不在像中; 并且

$$(\iota^*)^{-1}(V_{\mathbb{Z}}((n))) = V_{\mathbb{Q}}((n)^e) = \begin{cases} \text{Spec } \mathbb{Q}, & n = 0, \\ \emptyset, & n \neq 0. \end{cases}$$

这正是 $(0)^e = (0)$ 与 $(n)^e = \mathbb{Q}$ ($n \neq 0$) 的几何意义: 扩张控制闭集沿谱映射的原像.

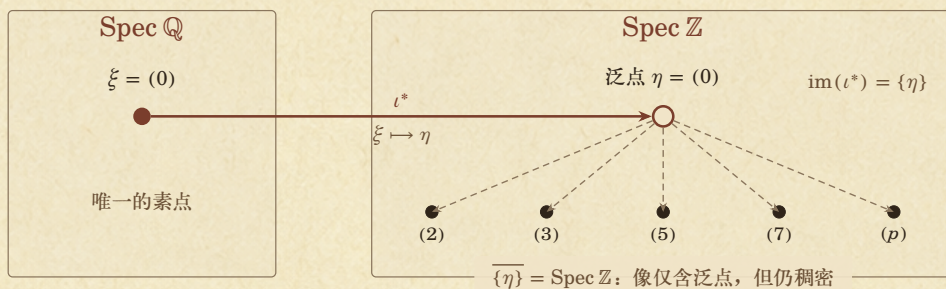


图 2.2: $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ 诱导的谱映射. 唯一点映到泛点; 各闭点均未被命中, 但该像仍在 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 中稠密.

定理 2.11 (谱映射的连续性). 对每个理想 $I \subseteq A$, 有

$$(\varphi^*)^{-1}(V_A(I)) = V_B(I^e).$$

因此 $\varphi^* : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ 是拓扑空间的连续映射.

证明. 对 $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$, 有

$$\begin{aligned} \mathfrak{q} \in (\varphi^*)^{-1}(V_A(I)) &\iff I \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \iff \varphi(I) \subseteq \mathfrak{q} \\ &\iff I^e \subseteq \mathfrak{q} \iff \mathfrak{q} \in V_B(I^e). \end{aligned}$$

每个闭集都形如 $V_A(I)$, 故等式给出连续性. $\square$

这里 $\varphi^{-1}(J)$ 是环中子集的原像, 而 $(\varphi^*)^{-1}(V_A(I))$ 是谱中点集的原像. 图 2.3 把两层原像以及扩张、收缩的方向放在一起.

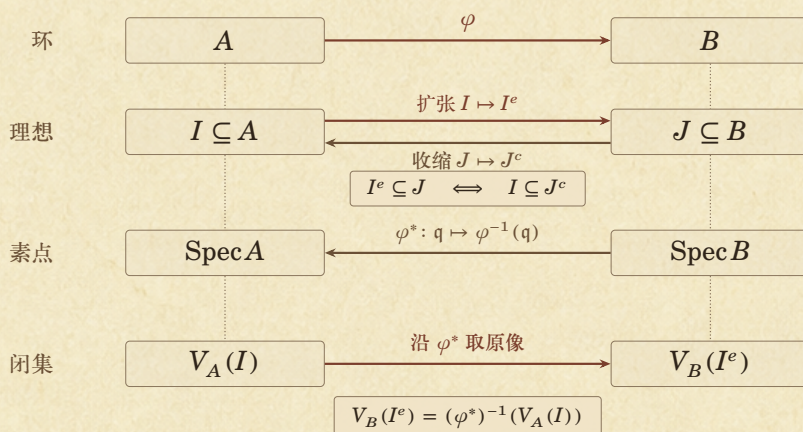


图 2.3: 环同态、理想与素谱. 点沿 φ^* 向左; A 中的闭集则沿点映射取原像, 因而向右.

2.1.5 收缩对应闭集像的闭包

连续性控制闭集的原像, 却不保证闭集的像仍闭. 为计算像的闭包, 先记录环中原像与两种运算的相容性.

引理 2.12. 对任意理想族 $(J_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 及理想 $J \subseteq B$, 有

$$\varphi^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \varphi^{-1}(J_\lambda), \quad \varphi^{-1}(\sqrt{J}) = \sqrt{\varphi^{-1}(J)}.$$

证明. 第一式逐元素展开即得; 当指标集为空时, 两端都是 A . 对第二式, $a \in \varphi^{-1}(\sqrt{J})$ 当且仅当某个 $n \geq 1$ 满足 $\varphi(a)^n = \varphi(a^n) \in J$, 这又等价于 $a \in \sqrt{\varphi^{-1}(J)}$. $\square$

定理 2.13 (闭集像的闭包). 对理想 $J \subseteq B$, 有

$$\overline{\varphi^*(V_B(J))} = V_A(J^c).$$

证明. 命题 2.7、引理 2.12 与定理 2.5 依次给出

$$\begin{aligned} \overline{\varphi^*(V_B(J))} &= V_A\left(\bigcap_{\substack{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \\ J \subseteq \mathfrak{q}}} \varphi^{-1}(\mathfrak{q})\right) \\ &= V_A\left(\varphi^{-1}\left(\bigcap_{\substack{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \\ J \subseteq \mathfrak{q}}} \mathfrak{q}\right)\right) = V_A(\varphi^{-1}(\sqrt{J})) \\ &= V_A(\sqrt{\varphi^{-1}(J)}) = V_A(J^c). \end{aligned}$$

即使不同的 $\mathfrak{q}$ 收缩成同一点, 重复求交也不改变结果. 若 $J = B$, 则左边为空集, 右边为 $V_A(A) = \emptyset$, 上述空交约定仍适用. $\square$

推论 2.14 (整个谱的像). 对任意环同态 $\varphi : A \rightarrow B$, 有

$$\overline{\varphi^*(\operatorname{Spec} B)} = V_A(\ker \varphi).$$

特别地, 单射环同态诱导的谱映射具有稠密像.

证明. 在定理 2.13 中取 $J = (0)$. 此时 $V_B((0)) = \operatorname{Spec} B$, 且 $J^c = \varphi^{-1}((0)) = \ker \varphi$. 若 φ 单射, 则右边为 $V_A((0)) = \operatorname{Spec} A$. $\square$

回到图 2.2. 等式 $(0)^c = (0)$ 表明, $V_{\mathbb{Q}}((0)) = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}$ 的像虽只有泛点 $\{\eta\}$, 其闭包却是 $V_{\mathbb{Z}}((0)) = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$; 而 $\mathbb{Q}^c = \mathbb{Z}$ 对应空闭集, 其像与闭包仍为空. 因此收缩控制的是闭集像的闭包, 而不是点集像本身; 定理中的闭包绝不能删去.

本讲的两公式可作如下总结：

理想操作	相应的闭集操作
扩张 $I \mapsto I^e$	$V_B(I^e) = (\varphi^*)^{-1}(V_A(I))$: 闭集取原像
收缩 $J \mapsto J^c$	$V_A(J^c) = \overline{\varphi^*(V_B(J))}$: 闭集取像后再闭包

以上结果的环论部分可参见 [1] 第 1 章. 它们说明 Spec 并非只把环换成一组点: 理想的和、积、根、扩张与收缩恰好控制闭集之交、并、原像与像的闭包.

习题

- (1) 直接证明 $\sqrt{I}$ 是理想且 $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$, 并指出交换性在何处使用.
- (2) 补全命题 2.2 中 $V_A(I \cap J) = V_A(IJ)$ 的两个包含方向.
- (3) 设 $T \subseteq \text{Spec} A$. 不引用正文的闭包公式, 直接证明 $V_A(\bigcap_{\mathfrak{p} \in T} \mathfrak{p})$ 是包含 T 的最小闭集.
- (4) 对 $n = 0, 1, 12, 30$ 分别写出 $V_{\mathbb{Z}}((n))$, 并说明 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 的每个非空开集为何包含泛点.
- (5) 对 $f = t^4(t-1)^2(t-i) \in \mathbb{C}[t]$, 求 $V_{\mathbb{C}[t]}((f))$, 并计算各点对应的商域 $\mathbb{C}[t]/\mathfrak{p}$.
- (6) 设 $\psi: B \rightarrow C$. 逐点验证 $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$, 并说明为何这正是反变性.
- (7) 对 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, 重新计算所有理想的扩张与收缩, 并说明 $I \subseteq (I^e)^c$ 可以是严格包含. 再设 k 为域, 并考虑对角同态 $\Delta: k \rightarrow k \times k, a \mapsto (a, a)$. 取 $J = k \times (0)$, 说明 $(J^c)^e \subseteq J$ 也可以是严格包含.
- (8) 设 $q: A \rightarrow A/I$ 为商映射. 求 $q^*: \text{Spec}(A/I) \rightarrow \text{Spec} A$ 的像, 并用定理 2.13 判断这个像是否已经闭合. (提示: 对 $\mathfrak{p} \supseteq I$, 证明 $\mathfrak{p}/I$ 是 A/I 的素理想.)
- (9) 证明 $\varphi^*(\text{Spec} B)$ 在 $\text{Spec} A$ 中稠密, 当且仅当 $\ker \varphi \subseteq \sqrt{(0)}$.

参考文献与延伸阅读

- [1] ATIYAH M F, MACDONALD I G. Introduction to Commutative Algebra[M]. Addison-Wesley, 1969.