

3.2 第 8 讲 Berkovich 圆盘、球完备与泛函分析

本讲除另有说明外, K 表示完备的非阿基米德赋值域, 记 $A = K\langle T \rangle$, 赋予 Gauß 范数 $\|\cdot\|_G$. 沿用第七讲的闭球 $D(a, r)$ 、Berkovich 谱 $\mathcal{M}(A)$ 、圆盘点 $x_{a,r}$ 及完备剩余域 $\mathcal{H}(x)$ 的记号; 圆盘点的参数满足 $|a| \leq 1, 0 \leq r \leq 1$.

3.2.1 最大模与谱半径

当 $r = 1$ 时, 圆盘半范数就是 Gauß 范数, 与 $|a| \leq 1$ 的球心 a 无关. 记 $x_G = x_{0,1}$, 称为 Gauß 点. 在第七讲构造的谱中, 圆盘条件给出子集 $D^{\text{an}}(a, r) = \{x \in \mathcal{M}(A) : |T - a|_x \leq r\}$, 称为解析闭圆盘. 由于 $|T - a|_{x_{a,r}} = r$, 这个子集包含 $x_{a,r}$.

命题 3.16. 对 $|a| \leq 1, 0 \leq r \leq 1$ 以及每个 $f \in A$, 都有

$$\max_{x \in D^{\text{an}}(a, r)} |f|_x = |f|_{x_{a,r}} = \|f\|_{a,r}.$$

特别地, $D^{\text{an}}(0, 1) = \mathcal{M}(A)$, 且 $\max_{x \in \mathcal{M}(A)} |f|_x = |f|_{x_G} = \|f\|_G$. 同一个圆盘点 $x_{a,r}$ 同时实现圆盘上所有函数的最大模.

证明. 先设 $r > 0$, 将 f 展开为 $\sum_{n \geq 0} c_n (T - a)^n$. 对 $x \in D^{\text{an}}(a, r)$, 其部分和满足 $|\sum_{n=0}^N c_n (T - a)^n|_x \leq \max_{0 \leq n \leq N} |c_n| r^n \leq \|f\|_{a,r}$. 部分和在 Gauß 范数下趋于 f , 而 $|\cdot|_x \leq \|\cdot\|_G$, 故取极限得到 $|f|_x \leq \|f\|_{a,r}$. 当 $r = 0$ 时, 由 $f = f(a) + (T - a)g$ 得到 $|f|_x = |f(a)|$, 同样成立. 这个上界在已经构造的点 $x_{a,r}$ 处达到, 故它确为最大值. 最后, 任意谱点均满足 $|T|_x \leq \|T\|_G = 1$, 所以 $D^{\text{an}}(0, 1) = \mathcal{M}(A)$, 再取 $a = 0, r = 1$ 即得 Gauß 范数的结论. $\square$

最大模公式说明, A 中元素的全部点值不仅能区分元素, 还能恢复其 Gauß 范数. 对每个 $x \in \mathcal{M}(A)$, 记 $f(x)$ 为 f 在 $\mathcal{H}(x)$ 中的像. 记 $\mathcal{P}$ 为所有满足 $u_x \in \mathcal{H}(x)$ 且 $\sup_x |u_x| < \infty$ 的族 $u = (u_x)_{x \in \mathcal{M}(A)}$ 组成的 K -代数, 运算按各分量定义, 并令 $\|u\|_\infty = \sup_x |u_x|$.

命题 3.17. $\mathcal{P}$ 关于 $\|\cdot\|_\infty$ 是交换 Banach K -代数, 且取值映射

$$A \rightarrow \mathcal{P}, \quad f \mapsto (f(x))_{x \in \mathcal{M}(A)}$$

是等距的 K -代数嵌入.

证明. 上确界范数满足强三角不等式与次乘性. $\mathcal{P}$ 中的 Cauchy 列在每个完备域 $\mathcal{H}(x)$ 中都有极限, 一致的 Cauchy 估计保证极限族仍有界, 并且原列一致收敛于它, 故 $\mathcal{P}$ 完备. 各取值映射 $A \rightarrow \mathcal{H}(x)$ 都是 K -代数同态, 而命题 3.16 给出 $\sup_x |f(x)| = \|f\|_G$, 所以合成的映射是等距嵌入. $\square$

这一表示中的函数值 $f(x)$ 属于各点的完备剩余域 $\mathcal{H}(x)$, 不必属于 K .

对于一般的交换 Banach K -代数 B , 全部点值是否仍能恢复原范数? 由谱点的有界性, $|f|_x \leq \|f\|$, 但这个上界还可以利用乘法性改进: 对每个 $n \geq 1$, 有 $|f|_x^n = |f^n|_x \leq \|f^n\|$, 所以 $|f|_x \leq \inf_{n \geq 1} \|f^n\|^{1/n}$. 这个综合所有幂次得到的上界, 正是下面的谱半径.

命题 3.18. 设 B 是交换 Banach K -代数. 对 $f \in B$, 极限

$$\rho_B(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|f^n\|^{1/n}$$

存在, 称为 f 的谱半径 (spectral radius). 对每个 $x \in \mathcal{M}(B)$, 有 $|f|_x \leq \rho_B(f) \leq \|f\|$. 若范数还具有乘法性, 则它本身给出一个谱点, 并且 $\max_{x \in \mathcal{M}(B)} |f|_x = \rho_B(f) = \|f\|$.

证明. 若某个 $f^m = 0$, 则此后的幂均为零, 极限与下确界都为零. 否则先固定 $m \geq 1$, 再把任意 $n \geq 1$ 写成 $n = qm + j$, 其中 $0 \leq j < m$. 由 $f^n = (f^m)^q f^j$ 及次乘性, $\|f^n\| \leq \|f^m\|^q \|f^j\|$. 余数 j 随 n 变化, 但只有 $0, \dots, m-1$ 这有限种可能, 故可用固定常数 $C_m = \max_{0 \leq j < m} \|f^j\| \geq 1$ 统一控制余项因子. 取 n 次方根, 得到

$$\|f^n\|^{1/n} \leq \|f^m\|^{q/n} C_m^{1/n}.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $q/n \rightarrow 1/m$, 而 $C_m^{1/n} \rightarrow 1$, 因此 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f^n\|^{1/n} \leq \|f^m\|^{1/m}$. 由于 m 任意, 上极限不超过 $\inf_{m \geq 1} \|f^m\|^{1/m}$. 记 $\alpha = \inf_{m \geq 1} \|f^m\|^{1/m}$. 对每个 $N \geq 1$, 所有 $n \geq N$ 都满足 $\|f^n\|^{1/n} \geq \alpha$, 故 $\inf_{n \geq N} \|f^n\|^{1/n} \geq \alpha$. 由下极限的定义, $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|f^n\|^{1/n} = \sup_{N \geq 1} \inf_{n \geq N} \|f^n\|^{1/n} \geq \alpha$. 结合刚证得的 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f^n\|^{1/n} \leq \alpha$, 上下极限都等于 α , 所以极限存在并等于下确界.

对每个谱点, 前面的幂次估计给出 $|f|_x \leq \rho_B(f)$; 在下确界中取 $n = 1$, 得到 $\rho_B(f) \leq \|f\|$. 若范数具有乘法性, 则 $\|f^n\|^{1/n} = \|f\|$, 且范数本身满足谱点的全部公理, 所以在这个谱点上达到上界 $\rho_B(f) = \|f\|$. $\square$

对于 $K\langle T \rangle$, Gauß 范数的乘法性保证了谱半径、原范数与谱上最大模相等. 一般 Banach 代数的原范数则可能严格大于所有点值, 如下例所示.

例 3.19 (点值与原范数). 令 $B = K[U]/(U^2)$, 记 ε 为 U 的像, 故 $\varepsilon \neq 0$ 而 $\varepsilon^2 = 0$. 每个元素唯一写成 $a + b\varepsilon$, 其中 $a, b \in K$, 并赋予范数 $\|a + b\varepsilon\| = \max\{|a|, |b|\}$. 乘法公式 $(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = ac + (ad + bc)\varepsilon$ 与强三角不等式给出次乘性, 其余范数公理直接由

系数验证. 此范数下的 Cauchy 列恰好是两个系数分别构成 Cauchy 列; 由 K 完备, B 是交换 Banach K -代数.

对任意 $x \in \mathcal{M}(B)$, 乘法性给出 $|\varepsilon|_x^2 = |\varepsilon^2|_x = 0$. 对 $a + b\varepsilon$ 与 $a = (a + b\varepsilon) - b\varepsilon$ 分别用三角不等式, 得到 $|a + b\varepsilon|_x = |a|$. 反过来, 投影 $a + b\varepsilon \mapsto a$ 确实给出这个谱点, 故 $\mathcal{M}(B)$ 恰有一个点.

再计算谱半径. 当 $a = 0$ 时, $(b\varepsilon)^2 = 0$, 故谱半径为零. 当 $a \neq 0$ 时, $(a + b\varepsilon)^n = a^n + na^{n-1}b\varepsilon$. 由 $|n| \leq 1$, 有 $|a|^n \leq \|(a + b\varepsilon)^n\| \leq |a|^n \max\{1, |b/a|\}$. 取 n 次方根并令 $n \rightarrow \infty$, 得到 $\rho_B(a + b\varepsilon) = |a|$. 因此对所有 $a, b \in K$, 都有

$$\max_{x \in \mathcal{M}(B)} |a + b\varepsilon|_x = \rho_B(a + b\varepsilon) = |a|, \quad \|a + b\varepsilon\| = \max\{|a|, |b|\}.$$

特别地, $\|\varepsilon\| = 1$, 但其谱半径和全部点值均为零. 在这个代数中, 全部点值既不能恢复原范数, 也不能区分 ε 与 0 .

3.2.2 球完备与完备性

定义 3.20 (球完备). 设 F 是非阿基米德赋值域. 若 F 中每个按包含关系全序排列的非空闭球族都有公共点, 则称 F 是球完备的 (spherically complete). 允许任意指标集和非负实数半径, 不要求半径趋于零.

命题 3.21. 非阿基米德赋值域 F 完备, 当且仅当 F 中每个半径趋于零的递减闭球列 $D(a_1, r_1) \supseteq D(a_2, r_2) \supseteq \dots$ 都有公共点. 此时公共点唯一. 特别地, 球完备的赋值域必完备.

证明. 若 F 完备, 则 $m \geq n$ 时的不等式 $|a_m - a_n| \leq r_n$ 说明球心构成 Cauchy 列. 其极限属于每个闭球. 两个公共点之间的距离不超过每个 r_n , 故只能相同.

反之, 设每个半径趋于零的递减闭球列都有公共点. 对任意 Cauchy 列 (x_n) , 可选取严格递增的整数 n_j , 使 $m, n \geq n_j$ 时 $|x_m - x_n| \leq 2^{-j}$. 于是闭球 $D(x_{n_j}, 2^{-j})$ 递减; 它们的公共点是子列 (x_{n_j}) 的极限, 也是整个 Cauchy 列的极限, 故 F 完备. 球完备性包含上述闭球条件, 因此蕴含完备性. $\square$

球完备的来历. 球完备的一个源头是赋值域的扩张问题. 1932 年, Wolfgang Krull 在《一般赋值理论》中研究: 若不增加非零元素赋值的可能取值, 也不改变剩余域, 一个赋值域还能否真扩大? 这里的剩余域是把赋值不超过 1 的元素组成的环, 模去赋值小于 1 的元素所成的理想. 他证明, 每个赋值域都能扩张到一个不能再如此扩大的域 [6]^{Satz 24}. 1942 年, Irving Kaplansky 进一步刻画了这种极大性: 用闭球的语言说, 不

能再作上述扩张, 恰好等价于球完备 [4]^{Theorem 4}. 因此, 球完备不仅是比 Cauchy 完备性更强的交集条件, 也反映了赋值域本身的扩张性质.



Wolfgang Krull, 1967 年



Irving Kaplansky, 1984 年, Berkeley¹

这一区别在泛函分析中有很具体的作用. 1952 年, A. W. Ingleton 在非阿基米德 Hahn–Banach 定理的研究中采用了球完备条件 [3]. 延拓一个有界线性泛函时, 首先要为新加入的向量选择一个函数值. 为了保持原有的范数界, 这个值必须同时满足一族形如 $|c - b| \leq r$ 的约束, 也就是属于一族闭球. 原泛函的范数界与强三角不等式保证这些球两两相交, 因而彼此嵌套, 却不保证其半径趋于零; 通常的完备性因而不足以保证存在这样的函数值, 球完备性则恰好保证这些约束有共同解.

命题 3.22. 平凡赋值域以及完备的离散赋值域都是球完备的. 特别地, $\mathbb{Q}_p$ 是球完备的.

证明. 平凡赋值域中的非空闭球只有单点集和整个域, 结论成立. 以下设 F 完备且 $|F^\times| = \theta^{\mathbb{Z}}$, 其中 $0 < \theta < 1$. 取 F 中一个按包含关系全序排列的非空闭球族. 若其中有单点球, 则这个点属于整个球族, 故可假设各球半径均为正. 由于非零距离都在 $\theta^{\mathbb{Z}}$ 中, 每个闭球都可把半径换成不超过原半径的最大值群元素, 而不改变球本身. 若这些半径有最小值, 相应的球就包含于所有球中, 交集非空.

若半径没有最小值, 它们的下确界就为零: 否则所有半径都有正下界, 离散的幂次便会给出最小值. 可从球族中选出半径严格递减且趋于零的球列. 由命题 3.21, 这个球列有公共点 a . 原球族中的任一球都包含该球列中半径足够小的成员, 故也包含 a . $\square$

例 3.23 (完备而不球完备的赋值域). 设 p 为素数, 把 $\mathbb{F}_p$ 看作平凡赋值域. 在 $\mathbb{F}_p((t))$ 中, t 没有 p 次根. 依次加入 $t^{1/p}, t^{1/p^2}, \dots$, 得到

$$F_m = \mathbb{F}_p((t^{1/p^m})) \quad (m \geq 0), \quad F = \bigcup_{m \geq 0} F_m, \quad |t| = e^{-1}.$$

每个 F_m 是以 t^{1/p^m} 为变量的形式 Laurent 级数域; 非零级数的赋值为 $e^{-\alpha}$, 其中 α 是最低的 t -指数. 嵌入 $F_m \rightarrow F_{m+1}$ 由 $t^{1/p^m} \mapsto (t^{1/p^{m+1}})^p$ 给出, 保持赋值, 故 F 是赋值域. 记 L 为 F 的完备化, 则 L 完备而不球完备.

¹左图: Konrad Jacobs 摄, Oberwolfach 照片档案, 图源, CC BY-SA 2.5. 右图: George M. Bergman 摄, 图源, CC BY-SA 4.0.

证明. 令 $q_j = 1 - p^{-j}$, $a_n = \sum_{j=1}^n t^{q_j}$, 并在 L 中取闭球 $D_n = D(a_n, e^{-q_{n+1}})$. 由于各指数的分母都整除 p^n , 有 $a_n \in F_n$. 相邻球心满足 $|a_{n+1} - a_n| = e^{-q_{n+1}}$, 而球半径严格递减, 故 $D_{n+1} \subseteq D_n$. 又因 $a_n \notin D_{n+1}$, 包含关系严格; 这些半径趋于 $e^{-1} > 0$.

假设 $b \in \bigcap_{n \geq 1} D_n$. 由 F 在 L 中稠密, 可取 $h \in F$, 使 $|b - h| < e^{-1}$. 由于每个球的半径都大于 e^{-1} , 强三角不等式表明 h 也属于所有 D_n . 取 $m \geq 0$ 使 $h \in F_m$, 则 h 的指数全在 $p^{-m}\mathbb{Z}$ 中, 但 $q_{m+1} = 1 - p^{-(m+1)} \notin p^{-m}\mathbb{Z}$. 在 F_{m+1} 中比较系数, $h - a_{m+1}$ 在指数 q_{m+1} 处的系数为 $-1 \neq 0$, 故其最低指数至多为 q_{m+1} . 于是

$$|h - a_{m+1}| \geq e^{-q_{m+1}} > e^{-q_{m+2}},$$

与 $h \in D_{m+1}$ 矛盾. 因此 L 是完备赋值域, 却不是球完备的. $\square$

对 F 中的 Laurent 级数而言, 这些球依次要求指数 $q_1, q_2, \dots$ 处的系数为 1, 但新增项 t^{q_j} 的赋值趋于 e^{-1} , 并不趋于零. 这串嵌套球并未缩小到任意精度, 因而不属于完备性所保证的半径趋于零的情形.

逐次开根还有一个代数上的效果: F 中的每个元素都有 p 次根. 事实上, 若 $h = \sum_{j \geq J} c_j t^{j/p^m} \in F_m$, 则 $u = \sum_{j \geq J} c_j t^{j/p^{m+1}} \in F_{m+1}$ 满足 $u^p = h$, 因为 $c_j^p = c_j$. 这个性质在完备化后仍然成立: 对 $b \in L$, 取 $h_n \in F$ 使 $h_n \rightarrow b$, 再取 $u_n \in F$ 使 $u_n^p = h_n$. 由 $|u_n - u_\ell|^p = |h_n - h_\ell|$, 列 (u_n) 是 Cauchy 列, 故收敛于某个 $u \in L$, 且 $|u_n^p - u^p| = |u_n - u|^p \rightarrow 0$, 从而 $u^p = b$.

3.2.3 代数闭域上的四类点与连续路径

本节设 K 为代数闭、完备且赋值非阿基米德、非平凡的域, 仍记 $A = K\langle T \rangle$.

定义 3.24 (谱点的半径). 对 $x \in \mathcal{M}(A)$ 及 $a \in K$, 记 $s_x(a) = |T - a|_x$. 称 $r(x) = \inf_{a \in K} s_x(a)$ 为谱点 x 的半径(radius).

引理 3.25. 谱点 x 由函数 s_x 唯一决定, 且 $0 \leq r(x) \leq 1$. 对任意 $a, b \in K$, 有

$$|a - b| \leq \max\{s_x(a), s_x(b)\}, \quad s_x(b) \leq \max\{s_x(a), |a - b|\}.$$

特别地, 若 $s_x(a) > s_x(b)$, 则 $|a - b| = s_x(a)$. 点 x 是圆盘点, 当且仅当定义 $r(x)$ 的下确界达到; 若它在 a 处达到, 则 $|a| \leq 1$ 且 $x = x_{a, r(x)}$.

证明. 由 K 代数闭, 每个非零多项式都能分解为常数与一次因子的乘积, 故 s_x 决定 x 在多项式上的取值. 再由多项式的稠密性及估计 $||f|_x - |g|_x| \leq \|f - g\|_G$, 可知它决定整个谱点. 由 $s_x(0) \leq 1$ 得 $0 \leq r(x) \leq 1$; 两条不等式都来自强三角不等式. 若 $s_x(a) > s_x(b)$, 把第二条不等式中的 a, b 对调, 再与第一条合用, 便得所述等式.

记 $r = r(x)$. 若下确界在 a 处达到, 则 $|a| \leq \max\{s_x(a), s_x(0)\} \leq 1$. 当 $|a - b| > r$ 时, 上述不等式迫使 $s_x(b) = |a - b|$; 当 $|a - b| \leq r$ 时, 它们与 $s_x(b) \geq r$ 合起来给出 $s_x(b) = r$. 因此 $s_x(b) = \max\{r, |a - b|\}$, 由命题 3.13 及刚证的唯一性, 得到 $x = x_{a,r}$. 反之, 圆盘点满足 $s_x(b) = \max\{r, |a - b|\}$, 故下确界 r 在 a 处达到. $\square$

定理 3.26 (闭单位圆盘中的四类点). $\mathcal{M}(A)$ 中的每个点恰属于以下一类, 其中所用球心都满足 $|a| \leq 1$:

- I. 求值点 $x_{a,0}$, 其中 $|a| \leq 1$.
- II. 圆盘点 $x_{a,r}$, 其中 $0 < r \leq 1$ 且 $r \in |K^\times|$.
- III. 圆盘点 $x_{a,r}$, 其中 $0 < r \leq 1$ 且 $r \notin |K^\times|$.
- IV. 来自递减闭球列 $D(a_n, r_n)$ 的点, 其中 $|a_n| \leq 1, 1 \geq r_1 \geq r_2 \geq \dots > 0$, $\bigcap_n D(a_n, r_n) = \emptyset$, 并且 $|f|_x = \lim_n |f|_{x_{a_n, r_n}}$. 此时 r_n 趋于一个严格正数.

前三类分别称为 *I*、*II*、*III* 型点, 最后一类称为 *IV* 型点.

证明. 给定谱点 x , 简记 $s = s_x, r = r(x)$. 若下确界达到, 引理 3.25 就给出前三类.

若下确界不达到, 取 a_n , 使 $r_n = s(a_n) \leq 1$ 严格递减并趋于 r . 此时 $|a_n| \leq 1$, 且 $m < n$ 时有 $|a_m - a_n| = r_m$, 故闭球 $D(a_n, r_n)$ 严格递减. 若 b 属于它们的交, 则 $s(b) \leq \max\{s(a_n), |a_n - b|\} \leq r_n$ 对每个 n 成立, 于是 $s(b) = r$, 与下确界不达到矛盾. 这些球的交为空, 完备性又说明 $r \neq 0$.

固定 $b \in K$. 因为 $s(b) > r$, 当 n 足够大时 $r_n < s(b)$, 从而 $|a_n - b| = s(b)$ 和 $|T - b|_{x_{a_n, r_n}} = s(b)$. 由一次因子分解, 各多项式的取值最终等于它在 x 处的取值. 统一估计 $|f|_{x_{a_n, r_n}} \leq \|f\|_G$ 再把这个收敛推广到任意 $f \in K\langle T \rangle$.

反过来, 给定第四类中的嵌套球列, 由 $|a_{n+1} - a_n| \leq r_n$ 及命题 3.13, 有

$$|f|_{x_{a_{n+1}, r_{n+1}}} \leq |f|_{x_{a_{n+1}, r_n}} = |f|_{x_{a_n, r_n}}.$$

因此这些取值的极限存在. 对加法、乘法和常数取极限, 便得到有界乘法半范数 x . 由完备性及球列的空交性, $r = \lim_n r_n > 0$. 每个 $b \in K$ 都在某个球之外; 从那一项开始, $|T - b|_{x_{a_n, r_n}}$ 保持为一个严格大于该项半径、因而大于 r 的常数. 另一方面, $|T - a_n|_x \leq r_n$. 所以 $\inf_b |T - b|_x = r$, 但下确界不达到. 这既说明所得点确属第四类, 也说明它与前三类不重合. 前三类由半径 r 及其是否属于值群区分. $\square$

推论 3.27. *I* 型点 $x_{a,0}$ 的支撑为 $(T - a)$, 其余三类点的支撑都为零. 若 *IV* 型点 x 来自闭球列 $D(a_n, r_n)$, 记 ξ 为 T 在 $\mathcal{H}(x)$ 中的像, 则 $|\xi - a_n| \leq r_n$ 对所有 n 成立. 因此, 在 $\mathcal{H}(x)$ 中以同样球心和半径定义的闭球有公共点 ξ , 而 $\xi \notin K$. 若 K 球完备, 则没有 *IV* 型点.

证明. 前三类点的支撑已由命题 3.13 算出. 设 x 是 IV 型点, $r = \lim_n r_n > 0$. 对非零级数 $f = \sum b_j T^j$, 取达到 Gauß 范数的最大指标 d . 对每个 $|a| \leq 1$, 以 $T - a$ 展开后的 d 次项系数仍有赋值 $\|f\|_G$: 它是 b_d 加上一列由 $b_j, j > d$ 贡献的项, 而这些项的赋值一致严格小于 $\|f\|_G$. 因而 $\|f\|_{x_{a_n, r_n}} \geq \|f\|_G r_n^d$. 取极限得到 $\|f\|_x \geq \|f\|_G r^d > 0$. 这证明了 IV 型点的支撑为零. 由完备剩余域的定义, $|\xi - a_n| = |T - a_n|_x \leq r_n$. 原球列在 K 中的交为空, 故 $\xi \notin K$. 最后, 球完备性排除了空交的嵌套闭球列, 因而排除了 IV 型点. $\square$

命题 3.28. Berkovich 闭单位圆盘 $\mathcal{M}(A)$ 是道路连通的. 更具体地, 对每个谱点 x , 存在连续路径 $[r(x), 1] \rightarrow \mathcal{M}(A)$, $t \mapsto x_t$, 满足 $x_{r(x)} = x, x_1 = x_G$ 及 $r(x_t) = t$. 当 $r(x) < 1$ 时, 这条路径是单射.

证明. 简记 $s = s_x, r = r(x)$. 对 $r < t \leq 1$, 取 a 使 $s(a) \leq t$, 并令 $x_t = x_{a, t}$; 另令 $x_r = x$. 因为 $|a| \leq \max\{s(a), s(0)\} \leq 1$, 这些确是闭单位圆盘中的点. 若另选 a' , 则 $|a - a'| \leq \max\{s(a), s(a')\} \leq t$, 故点 x_t 与选择无关. 引理 3.25 中的不等式还给出

$$|T - b|_{x_t} = \max\{t, s(b)\} \quad (r \leq t \leq 1).$$

右端对 t 连续, 一次因子分解便给出每个多项式的取值沿路径连续. 对级数用多项式一致逼近, 则其取值也是连续函数的一致极限. 这正是 $t \mapsto x_t$ 关于谱拓扑连续. 当 $t = 1$ 时得到 x_G . 同一公式给出 $r(x_t) = t$, 故 $r < 1$ 时路径为单射. 若 $r = 1$, 由 $s(0) \leq 1$ 可知下确界在 0 处达到, 引理 3.25 给出 $x = x_G$, 此时取常值路径. 任意两点各自连到 Gauß 点, 再反向拼接一条路径, 即得道路连通性. $\square$

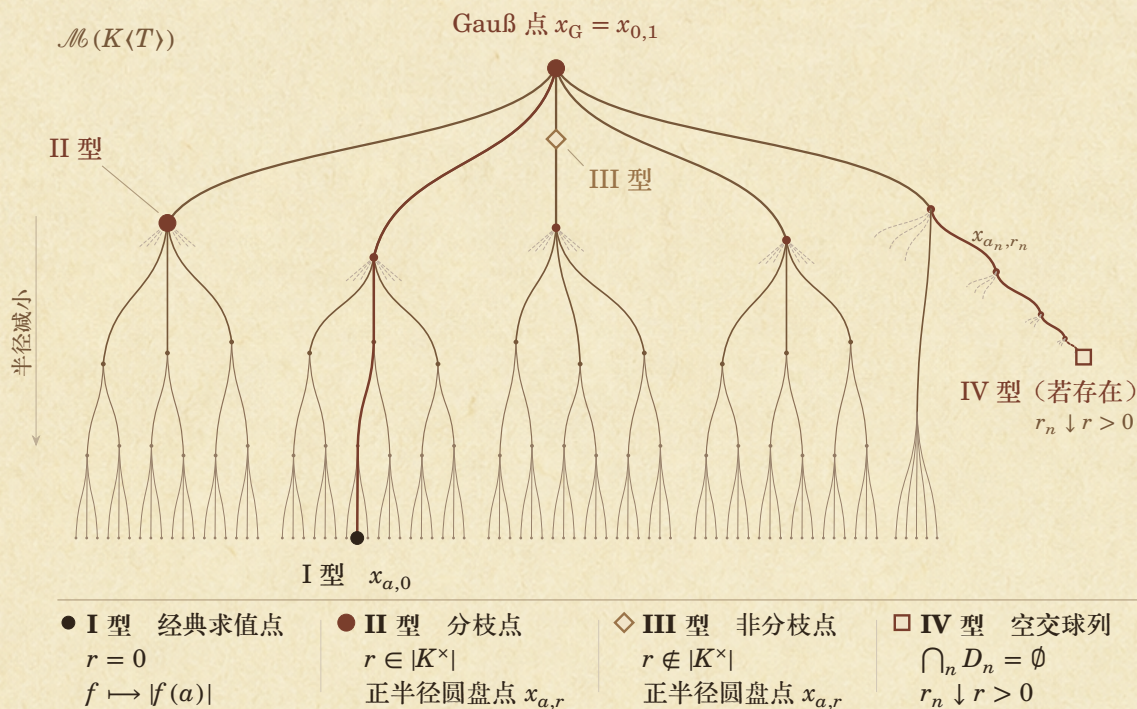


图 3.2: 代数闭、非平凡完备赋值域上的 Berkovich 闭单位圆盘. 图中只选取有限条代表性路径, 沿途还有未画出的分枝; III、IV 型在底域允许时出现. IV 型点也是树的端点, 但其半径严格为正, 空交的是底域中的闭球列.²

K 的闭单位球完全不连通, 而 $\mathcal{M}(A)$ 道路连通. 后者包含额外的圆盘点, 其半径可沿实区间连续变化; Gauß 点既位于上述路径的公共终点, 也同时实现所有解析函数的最大模.

本讲圆盘点的分类可参见 [1] 第 1 章 和 [7] 第 2.3 节.

习题

- (1) 证明完备赋值域中半径趋于零的嵌套闭球列有唯一公共点.
- (2) 对例 3.23, 计算 $m > n$ 时的 $|a_m - a_n|$, 证明球心列不是 Cauchy 列, 并说明这为什么不违背 L 的完备性.
- (3) 取平凡赋值域 k 和实数 $0 < \theta < 1$, 在 $k((t))$ 上令 $|f| = \theta^{\text{ord}_t(f)}$, 其中 $f \neq 0$ 且 $\text{ord}_t(f)$ 为最低非零项的指数, 并令 $|0| = 0$. 用系数稳定性证明它完备且球完备.
- (4) 曲线的局部参数与分数幂. 设 k 是特征零的域, $n \geq 1$. 曲线映射 $s \mapsto t = s^n$ 在原点的形式级数上给出 $k[[t]] \rightarrow k[[s]]$, 继而给出 $k((t)) \subset k((s))$. 证明每个 $h \in k((s))$ 唯一写成 $\sum_{r=0}^{n-1} s^r h_r(t)$, 其中 $h_r(t) \in k((t))$, 从而该域扩张的次数为 n . 对曲线 $y^2 = t^3(1+t)$, 证明存在唯一的 $u(s) \in k[[s]]$, 满足 $u(0) = 1$.

²图形参照 R. L. Benedetto, *Non-Archimedean Dynamics in Dimension One*, 2010 年讲义, 第 54 页图 3; J. Poineau 与 D. Turchetti, *Berkovich Curves and Schottky Uniformization*, 第 7 页图 1. 此处重新绘制为闭单位圆盘, 并标出四类点.

$u(s)^2 = 1 + s^2$. 令 $t = s^2, y = s^3 u(s)$, 求 $y(s)$ 的前三个非零项, 并把它们写成 t 的分数幂. 提示: 对 $u(s)^2 = 1 + s^2$ 逐项比较系数.

- (5) *Puiseux* 级数域. 设 k 是平凡赋值域, $|t| = e^{-1}$, 令 $P_k = \bigcup_{m \geq 1} k((t^{1/m!}))$, 各层按参数的相容幂次嵌入. 证明 P_k 是赋值域, 且 $P_k = \bigcup_{n \geq 1} k((t^{1/n}))$. 因此, 每个元素的指数都有一个固定的公分母; 阶乘只是使各层递增的一种选择. 证明 $P_{\mathbb{Q}}$ 中没有 $X^2 - 2$ 的根, 故它不是 $\mathbb{Q}((t))$ 的代数闭包. 提示: 比较假想根的最低指数与首项系数.
- (6) $\star$ *Puiseux* 域的完备化. 沿用习题 (5) 的记号, 令 $L_k = \widehat{P_k}$. 取 $q_j = j/(j+1)$, $a_n = \sum_{j=1}^n t^{q_j}$, 在 L_k 中令 $D_n = D(a_n, e^{-q_{n+1}})$. 证明 $a_n \in P_k$, 闭球 D_n 严格递减且交集为空, 从而 L_k 完备但不球完备. 提示: 若 b 属于交集, 取 $h \in P_k$ 使 $|b - h| < e^{-1}$, 则 h 也属于每个 D_n . 取正整数 M 使 $h \in k((t^{1/M}))$, 在同时包含 h 与 a_M 的有限层中, 比较 $h - a_M$ 在指数 $M/(M+1)$ 处的系数.
- (7) $\star$ 代数闭与球完备. 本题可直接使用以下两个定理: Newton–Puiseux 定理断言, 当 k 代数闭且特征为零时, P_k 是 $k((t))$ 的一个代数闭包 [5] 第 1 节; 完备非阿基米德赋值域的代数闭包, 关于延拓赋值的完备化仍然代数闭 [2] 定理 1.1. 取平凡赋值的 $k = \mathbb{C}$, 令 $|t| = e^{-1}$, 并以 $P_{\mathbb{C}}$ 作为 $\mathbb{C}((t))$ 的代数闭包, 记 $\mathbb{C}_t = \widehat{P_{\mathbb{C}}}$. 结合习题 (6), 证明 $\mathbb{C}_t$ 代数闭、完备而不球完备, 并由该题的闭球列说明 $\mathcal{M}(\mathbb{C}_t\langle T \rangle)$ 中存在 IV 型点.
- (8) $\star$ 设 K 代数闭、完备且赋值非平凡. 对 $|a|, |b| \leq 1, 0 \leq r, s \leq 1$, 令 $R = \max\{r, s, |a - b|\}$. 证明分别增大半径的两条路径在 $x_{a,R} = x_{b,R}$ 处相遇, 且 R 是使两个等半径圆盘点相同并同时满足半径不小于 r, s 的最小值.
- (9) $\star$ 在上题对 K 的假设下, 证明: K 球完备当且仅当 Berkovich 闭单位圆盘没有 IV 型点. 提示: 对一个空交的全序闭球族, 先选定其中一个球, 再通过平移和乘以标量把其后继球放进闭单位球; 利用实数半径的下确界选取一个共尾递减球列 (即原球族中每个球都包含球列中的某一项). 此处值群在正实数中稠密: 若 $0 < |\pi| < 1$, 代数闭性给出 $|\pi|^q \in |K^\times|$ 对所有 $q \in \mathbb{Q}$ 成立; 因此不同半径不能给出同一个球.
- (10) 在 $B = K \times K$ 上取范数 $\|(a, b)\| = \max\{|a|, |b|\}$. 计算 $\rho_B(a, b)$ 及全部 Berkovich 点, 验证最大模公式. 再用 $(1, 0), (0, 1)$ 说明该范数不是乘法范数.

参考文献与延伸阅读

- [1] BERKOVICH V G. Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-Archimedean Fields: vol. 33[M/OL]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1990. DOI: 10.1090/surv/033.

- [2] CONRAD B. Math 248A. Completion of Algebraic Closure[EB/OL]. [2026-09-17].
<https://math.stanford.edu/~conrad/154Page/handouts/algclosurecomp.pdf>.
- [3] INGLETON A W. The Hahn–Banach Theorem for Non-Archimedean-Valued Fields[J/OL]. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1952, 48(1): 41-45. DOI: 10.1017/S0305004100027353.
- [4] KAPLANSKY I. Maximal Fields with Valuations[J/OL]. Duke Mathematical Journal, 1942, 9(2): 303-321. DOI: 10.1215/S0012-7094-42-00922-0.
- [5] KEDLAYA K S. The Algebraic Closure of the Power Series Field in Positive Characteristic[EB/OL]. 1999 [2026-09-17].
<https://arxiv.org/abs/math/9810142v3>. arXiv: math/9810142.
- [6] KRULL W. Allgemeine Bewertungstheorie[J/OL]. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1932, 167: 160-196. DOI: 10.1515/crll.1932.167.160.
- [7] TEMKIN M. Introduction to Berkovich Analytic Spaces[EB/OL]. 2011. https://math.huji.ac.il/~temkin/papers/Introduction_to_Berkovich_Spaces.pdf. arXiv: 1010.2235.