

3.3 第 9 讲 谱上的函数与环层

3.3.1 从函数的取值到剩余域

设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是开集, 记 $\mathcal{O}(\Omega)$ 为其上的全纯函数环. 固定 $x \in \Omega$, 在 x 处取值给出含么环同态 $\text{ev}_x : \mathcal{O}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(x)$. 它保持加法、乘法和常数. 对实值连续函数环、光滑函数环, 也有同样的取值同态, 只是值域换成 $\mathbb{R}$.

命题 3.30. 设 A 是一个包含所有常值函数的 $\mathbb{F}$ -值函数环, 其中 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 在点 x 处消失的函数组成极大理想 $\mathfrak{m}_x = \{f \in A : f(x) = 0\}$, 且 $A/\mathfrak{m}_x \simeq \mathbb{F}$.

证明. 取值映射的核是 $\mathfrak{m}_x$. 它是满射, 因为常值函数 c 的像为 c . 商环定理给出 $A/\mathfrak{m}_x \simeq \mathbb{F}$, 因而 $\mathfrak{m}_x$ 极大, 特别是素理想. $\square$

于是, 求 $f(x)$ 就是把 f 模掉 $\mathfrak{m}_x$. 若 $f(x) = 0$, 则 $f + c$ 的剩余类等于常数 c 的剩余类; 一般地, $f - f(x) \in \mathfrak{m}_x$. 这个简单等式把分析中的取值变成了环的商运算.

第三讲的 Gelfand 变换也是这种取值: 对交换复 Banach 代数的元素 a , 定义特征标空间上的函数 $\hat{a}(\chi) = \chi(a)$. 由具体函数环出发, 点先给出取值同态; 在抽象 Banach 代数中, 则反过来把合适的同态作为点, 再把代数元素解释为函数.

现在设 A 是交换含么环, $X = \text{Spec} A$. 对素理想 $\mathfrak{p}$, 商环 $A/\mathfrak{p}$ 是整环, 但未必是域. 我们把它放入分式域: 整环 R 的分式域由 $a/b, b \neq 0$ 组成, 其中 $a/b = c/d$ 当且仅当 $ad = bc$, 运算采用通分和分子分母相乘. 记此域为 $\text{Frac}(R)$.

定义 3.31. 点 $x = \mathfrak{p} \in X$ 的剩余域 (residue field) 是 $\kappa(x) = \kappa(\mathfrak{p}) = \text{Frac}(A/\mathfrak{p})$. 对 $f \in A$, 称自然映射

$$A \longrightarrow A/\mathfrak{p} \longrightarrow \kappa(\mathfrak{p})$$

下 f 的像为 f 在 x 处的值, 记为 $f(x)$. 我们据此把 A 的元素看成 X 上的函数.

这一定义立刻给出 $f(x) = 0 \iff f \in \mathfrak{p}$, 以及 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ 、 $(fg)(x) = f(x)g(x)$. 不同点的取值域可以不同; 加乘始终在同一个点的剩余域里进行. 若 A 是域 k 上的非零代数, 常数 $c \in k$ 通过结构映射进入这些剩余域. 对一般环则未必有一个共同的常数域.

为什么还要取分式域? 若 $g(x) \neq 0$, 在 x 附近应当允许除以 g , 所得函数的值就应是 $f(x)/g(x)$. 所有这些商恰好组成 $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})$. 因此剩余域是容纳局部取值的域, 而不是把全部局部函数装在一起的环. 例如 T 与 $2T$ 在复平面的原点都取零, 却不是同一个局部函数. 点值遗忘了函数在邻近点的变化.

例 3.32 (多项式的不同取值域). 在 $\text{Spec } \mathbb{C}[T]$ 的点 $(T - a)$ 处, 剩余域为 $\mathbb{C}$, f 的值就是通常的 $f(a)$. 在点 $\eta = (0)$ 处, 剩余域却是 $\mathbb{C}(T)$, $T(\eta)$ 是分式域中的 T , 并非某个预先指定的复数. 它保留了变量本身, 且没有非零多项式在 η 处消失.

在 $\text{Spec } \mathbb{R}[T]$ 中, $(T^2 + 1)$ 是极大理想, 剩余域为 $\mathbb{R}[T]/(T^2 + 1) \simeq \mathbb{C}$. 记 T 的像为 α , 则 $\alpha^2 = -1$, 故 $(T^2 + 1)(\alpha) = 0$, 而 $(T + 1)(\alpha) = \alpha + 1 \neq 0$. 选择同构把 α 送到 i 后, 这就是在 i 处代入. 把 α 送到 $-i$ 也给出同构; 素理想本身没有选定这两个表示中的哪一个.

例 3.33 (整数也是函数). 在 $X = \text{Spec } \mathbb{Z}$ 上, 闭点 (p) 的剩余域为 $\mathbb{F}_p$, 泛点 (0) 的剩余域为 $\mathbb{Q}$. 把整数 $6 \in \mathbb{Z}$ 看成函数, 则

$$6((2)) = 0, \quad 6((3)) = 0, \quad 6((5)) = 1 \in \mathbb{F}_5, \quad 6((0)) = 6 \in \mathbb{Q}.$$

因此它的零点集是 $V(6) = \{(2), (3)\}$. 这里的“零点”不是实数轴上的零点, 而是取值同态把 6 送到零的素理想. 乘积 $6 = 2 \cdot 3$ 对应 $V(6) = V(2) \cup V(3)$, 正是第五讲的理想运算所表达的几何关系.

例 3.34 (Gauß 整数环上的零点). 在 $\text{Spec } \mathbb{Z}[i]$ 上, 函数 5 的零点为 $\mathfrak{p}_+ = (2 + i)$ 与 $\mathfrak{p}_- = (2 - i)$, 因为 $5 = (2 + i)(2 - i)$, 且这两个素理想的商环都是 $\mathbb{F}_5$. 但函数 i 在这两点的值不同: 在 $\mathfrak{p}_+$ 处, $i = -2 = 3$; 在 $\mathfrak{p}_-$ 处, $i = 2$. 因而 $2 + i$ 在前一点取零, 在后一点取 4. 第五讲中 (5) 上方的两个点, 就能被这样一个函数区分开来.

例 3.35 (有理点不足以检测函数). 设 $A = \mathbb{F}_p[T]$. 非零多项式 $F = T^p - T$ 在每个点 $(T - a)$, $a \in \mathbb{F}_p$ 处都取零, 但在泛点处的值仍是 $\mathbb{F}_p(T)$ 中的非零元素 $T^p - T$. 所以, 只看底域中坐标的点, 可能把非零函数误认成零函数.

对 Berkovich 谱, 取值还有赋值的结构. 设 A 是完备赋值域 K 上的交换含么 Banach 代数, $x \in \mathcal{M}(A)$. 第六讲的命题 2.27 给出

$$A \longrightarrow \kappa(\mathfrak{p}_x) \longrightarrow \mathcal{H}(x), \quad \mathfrak{p}_x = \{f : |f|_x = 0\}, \quad |f(x)| = |f|_x.$$

这里 $f(x)$ 是域 $\mathcal{H}(x)$ 中的元素, $|f|_x$ 才是非负实数. 后者只表示前者的大小, 不保持通常的加法, 不能代替取值同态. 完备化则使收敛级数的取值也有自然的完备值域.

例 3.36 (圆盘点处的变量值). 取 $A = K\langle T \rangle$, 其中 K 完备、非阿基米德. 在经典点 $x_{a,0}$, $|a| \leq 1$ 处, $\mathcal{H}(x_{a,0}) = K$ 且 $T(x_{a,0}) = a$. 在正半径点 $x = x_{a,r}$, $0 < r \leq 1$ 处, 支撑为零. 若记 T 在 $\mathcal{H}(x)$ 中的像为 τ , 则 $|\tau - a| = r$, 且对 $f = \sum_n c_n (T - a)^n$, 有 $|f(x)| = \max_n |c_n| r^n$. 特别地, Gauß 点处 $|\tau| = 1$, 却不能写成 $T(x_G) = 1$. 事实上 $T - 1 \neq 0$, 而支撑为零, 故 $\tau - 1 \neq 0$.

3.3.2 分式函数及其最大正则区域

在复分析中,若 $g(x) \neq 0$,则由连续性, g 在 x 的某个邻域上无零点;因而全纯函数之商 f/g 在这个邻域上全纯. 分母在别处消失并不妨碍这件事. 交换代数中的对应条件是 $g \notin \mathfrak{p}$, 相应的邻域就是主开集 $D(g)$.

复分析中的亚纯函数 (meromorphic function, 亦称半纯函数) 局部可写成两个全纯函数之商, 分母不恒为零; 它允许极点. 约去公共因子以后, 分母不再消失的地方仍是全纯区域. 下面的有理函数及其最大正则区域, 是这一图像的代数对应.

本小节先假设 A 是整环. 同一分式域中的函数可以有不同分式表示, 所以应该问函数在哪里有合法的表示, 而不是只看某一次写下的分母.

定义 3.37. 整环 A 的分式域 $F = \text{Frac}(A)$ 中的元素称为 $X = \text{Spec} A$ 上的有理函数 (rational function). 若 $h \in F$ 能写成 $h = a/b$, 其中 $b \notin \mathfrak{p}$, 则称 h 在 $\mathfrak{p}$ 处正则 (regular). 此时令 $h(\mathfrak{p}) = \bar{a}/\bar{b} \in \kappa(\mathfrak{p})$. 称所有这类点组成的集合 U_h 为 h 的最大正则区域.

若 $a/b = c/d$ 且 $b, d \notin \mathfrak{p}$, 等式 $ad = bc$ 模掉 $\mathfrak{p}$ 后仍成立, 故上述取值与表示无关. “正则”是代数几何中与“全纯”对应的术语. 有理函数则起着亚纯函数的作用; 但在复分析中, 亚纯函数未必有理, 例如整函数 e^z 就不是有理函数. 因此这里采用代数几何的名称, 不把这两个概念直接等同.

命题 3.38. 对 $h \in F$, 令 $I_h = \{b \in A : bh \in A\}$. 则 I_h 是非零理想, 且

$$U_h = \bigcup_{b \in I_h} D(b) = X \setminus V(I_h).$$

特别地, 最大正则区域是开集, 它只取决于 h , 不取决于分式表示.

证明. 若 $b, c \in I_h, a \in A$, 则 $(b+c)h = bh + ch \in A, (ab)h = a(bh) \in A$, 故 I_h 是理想. 取一个表示 $h = u/v, v \neq 0$, 便有 $v \in I_h$, 所以它非零. 点 $\mathfrak{p}$ 属于 U_h , 恰好表示存在 $b \notin \mathfrak{p}$ 使 $bh \in A$, 即 $\mathfrak{p} \in D(b)$ 对某个 $b \in I_h$ 成立. 这给出所述等式和开性. $\square$

例 3.39 ($1/6$ 的正则区域). 对 $A = \mathbb{Z}, h = 1/6$, 条件 $bh \in \mathbb{Z}$ 等价于 $6 \mid b$, 故 $I_h = (6)$, $U_h = D(6) = \text{Spec} \mathbb{Z} \setminus \{(2), (3)\}$. 在素数 $p \neq 2, 3$ 处, $h((p))$ 是 $\mathbb{F}_p$ 中 6 的逆元; 例如 $h((5)) = 1, h((11)) = 2$. 在 (2) 或 (3) 处则不存在另一种分母非零的表示: 若 $1/6 = a/b$, 便有 $b = 6a$, 其分母必被 2, 3 整除. 因此这两个点确实是不能延拓为正则函数的点, 而不只是书写造成的障碍.

例 3.40 (约分与可去的分母). 在 $A = k[T]$ 中, 分式 $(T^2 - 1)/(T - 1)$ 表面上只在 $D(T - 1)$ 上给出取值, 但它等于多项式 $T + 1$, 所以最大正则区域是整个 $\text{Spec} k[T]$. 在 $(T - 1)$ 处的值为 $2 \in k$, 若 k 的特征为 2, 这个值就是零. 相比之下, $1/T$ 的最大正则区域恰为 $D(T)$.

例 3.41 (没有实极点, 却不是处处正则). 在实直线上, $h(T) = 1/(T^2 + 1)$ 对每个实数都有定义, 甚至是光滑函数. 然而在 $X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[T]$ 上, 它的最大正则区域是 $D(T^2 + 1) = X \setminus \{(T^2 + 1)\}$. 事实上, 若 $h = a/b$, 则 $b = a(T^2 + 1)$, 所以任何表示的分母都属于 $(T^2 + 1)$. 这个点的剩余域为 $\mathbb{C}$, 在其中 $T^2 + 1$ 确实取零. 从复分析看, 分母在 i 与 $-i$ 处消失; 从 $\mathbb{R}[T]$ 的素谱看, 这两个共轭坐标由同一个素理想记录.

在非空开集 $U \subset X$ 上处处正则的有理函数组成子环 $\{h \in F : U \subset U_h\}$. 加法与乘法的封闭性来自通分: 在 $\mathfrak{p}$ 处可用的两个分母之积仍不属于 $\mathfrak{p}$. 不同的开集分别配有函数环; 缩小定义域, 可能使原来不合法的分母变得合法.

3.3.3 开集上的函数与环层

仍设 A 是整环, $F = \operatorname{Frac}(A)$, $X = \operatorname{Spec} A$. 对非空开集 U , 记 $\mathcal{O}_X(U) = \{h \in F : U \subset U_h\}$, 即 U 上处处正则的有理函数环. 若 $\emptyset \neq V \subset U$, 限制映射 $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ 就是把同一个分式放到较小的定义域上. 另令 $\mathcal{O}_X(\emptyset)$ 为零环.

命题 3.42 (主开集与全局函数). 对非零的 $f \in A$, 有 $\mathcal{O}_X(D(f)) = \{a/f^n : a \in A, n \geq 0\} \subset F$. 特别地, $\mathcal{O}_X(X) = A$.

证明. 分式 a/f^n 在 $D(f)$ 上处处正则. 反过来, 若 $h \in F$ 在 $D(f)$ 上正则, 则由 $U_h = X \setminus V(I_h)$, 有 $V(I_h) \subset V(f)$. 根理想判据给出 $f \in \sqrt{I_h}$, 所以某个 $f^n \in I_h$, 即 $a = f^n h \in A$. 因此 $h = a/f^n$. 取 $f = 1$ 就得到全局函数环等于 A . $\square$

例 3.43 (删除零点以后能除以什么). 在 $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 上, $\mathcal{O}_X(D(6)) = \{a/6^n : a \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$, 记为 $\mathbb{Z}[1/6]$. 约分后, 允许的分母恰好只含素因子 2, 3; 例如 $1/2 = 3/6, 1/3 = 2/6$ 都在其中, $1/5$ 不在其中. 若进一步限制到 $D(30) \subset D(6)$, 则可以再除以 5. 限制同态就是 $\mathbb{Z}[1/6] \hookrightarrow \mathbb{Z}[1/30]$.

类似地, 在 $\operatorname{Spec} k[T]$ 上, $\mathcal{O}_X(D(T)) = k[T, T^{-1}]$, 它由有限个正、负整数次幂组成, 称为 Laurent 多项式环. 这里没有任何收敛条件; 例如 $T^2 + T^{-3}$ 合法, $\sum_{n \geq 0} T^n$ 则不是 Laurent 多项式.

例 3.44 (两块上的函数怎样合成一个函数). 在 $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 上, $D(2) \cup D(3) = X$, 交集为 $D(6)$. 设在这两块上分别给定 $h_2 \in \mathbb{Z}[1/2], h_3 \in \mathbb{Z}[1/3]$. 要使它们来自一个全局函数, 必须在交集上相等, 即它们在 $\mathbb{Q}$ 中是同一个数 h .

把 h 写成最简分数. 由 $h \in \mathbb{Z}[1/2]$, 分母只能含素因子 2; 由 $h \in \mathbb{Z}[1/3]$, 分母只能含素因子 3. 故分母只能是 1, 即 $\mathbb{Z}[1/2] \cap \mathbb{Z}[1/3] = \mathbb{Z}$. 于是相容的两块函数恰好合成一个整数函数, 而且唯一. 例如两边都取 7 可以合成; 分别取 $1/2$ 与 $1/3$ 则不行, 因为它们在交集上已经不相同.

全纯函数也遵守同样的规则. 若 $U = \bigcup_i U_i$, 各 U_i 上的全纯函数在交叠处相等, 便可以逐点合成 U 上唯一的函数; 全纯性是局部条件, 故所得函数仍全纯. 环层正是把“缩小定义域”和“相容函数合成”这两件事记录下来.

定义 3.45 (环层). 拓扑空间 X 上的环层 (*sheaf of rings*) $\mathcal{O}$ 由以下数据组成: 每个开集 U 对应一个环 $\mathcal{O}(U)$, 每个包含关系 $V \subset U$ 对应一个限制同态 $\rho_{U,V} : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$, 记 $s|_V = \rho_{U,V}(s)$. 这些数据满足:

- (1) 限制到自身不改变函数; 若 $W \subset V \subset U$, 则 $\rho_{V,W}\rho_{U,V} = \rho_{U,W}$.
- (2) 若 $U = \bigcup_i U_i$, 且 $s_i \in \mathcal{O}(U_i)$ 在每个 $U_i \cap U_j$ 上有相同限制, 则存在唯一的 $s \in \mathcal{O}(U)$, 使 $s|_{U_i} = s_i$ 对所有 i 成立.

另规定 $\mathcal{O}(\emptyset)$ 为零环. $\mathcal{O}(U)$ 的元素也称为 U 上的截面 (*section*); 当 $U = X$ 时, 称为全局截面, 也就是整个空间上的函数.

命题 3.46. 上述整环 A 的开集函数环 $\mathcal{O}_X(U)$ 及限制映射组成环层.

证明. 限制的恒等与复合性质直接成立. 设 $U \neq \emptyset$, 并在一个开覆盖的每块上给定相容的正则函数. 去掉空的覆盖成员后, 每两块之交都包含泛点 (0), 因而非空. 相容性说明各块给出的分式在 F 中相等, 记其共同值为 h . 每个点都在某一块中, 故 h 在 U 上处处正则. 于是 $h \in \mathcal{O}_X(U)$, 且它是唯一可能的合成函数. $\square$

这里说明的不是给函数任意分配点值, 而是把各处合法的函数表达放在一起. 例如在 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 中, 泛点必须属于每个非空开集; 同一个有理函数在不同素数处的值因而不能任意指定.

3.3.4 圆盘、圆环与解析函数

在素谱上, 缩小开集以后可以增加分母; 在解析几何中, 还应当允许新的收敛级数. 以下固定完备的非阿基米德赋值域 K . 先以 $X = \mathcal{M}(K\langle T \rangle)$ 为例, 取 $0 < r < 1$, 考虑闭圆盘 $V_r = \{x \in X : |T|_x \leq r\}$. 在这里, 级数 $\sum_{n \geq 0} a_n T^n$ 一致收敛的条件是 $|a_n| r^n \rightarrow 0$. 相应的函数代数

$$B_r = K\langle r^{-1}T \rangle = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n T^n : |a_n| r^n \rightarrow 0 \right\}, \quad \|f\|_r = \max_n |a_n| r^n.$$

它关于这个范数完备, 证明与第二讲 Tate 代数的系数逐项收敛证明相同. 记号 $r^{-1}T$ 指明变量允许的半径为 r , 不要求实数 r 属于 K . V_r 是闭圆盘; 这里写的是这一圆盘自身的解析函数代数, 并未把它当成开集.

例 3.47 (同一个几何级数在大小圆盘上的区别). 在 B_r 中, $F(T) = \sum_{n \geq 0} T^n$ 收敛, 且 $(1-T)F = 1$. 它不仅逐点收敛, 还满足精确的余项估计 $\|F - \sum_{n=0}^N T^n\|_r = r^{N+1}$, 所以在整个小圆盘上一致收敛.

同一个级数不属于 $K\langle T \rangle$, 因为其系数不趋于零. 相应的函数 $1/(1-T)$ 也不可能在整个闭单位圆盘上解析: 假如存在全局逆元, 在经典点 $T = 1$ 处取值就会得到 $0 = 1$. 这与 $1/6$ 在 $D(6)$ 上正则, 却不能在整体 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上正则相似.

例 3.48 (圆环上的函数与负次幂). 取 $0 < \rho < 1$, 考虑闭圆环 $W_\rho = \{x : \rho \leq |T|_x \leq 1\}$. 函数 $1/T$ 在这里有界, 大小不超过 ρ^{-1} . 圆环上的解析函数由 Laurent 级数 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n T^n$ 给出, 收敛条件为

$$|c_n| \rightarrow 0, \quad |c_{-n}| \rho^{-n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

第一条条件控制非负次幂在外边界的收敛, 第二条条件控制负次幂在内边界的收敛. 范数为 $\max\{\sup_{n \geq 0} |c_n|, \sup_{n \geq 1} |c_{-n}| \rho^{-n}\}$. 于是 $T^2 + T^{-3}$ 的范数为 ρ^{-3} . 当区域靠近原点时, 负次幂的大小增大, 正好对应它在原点的极点.

再取 $a \in K$ 满足 $0 < |a| < \rho$. 由于 $|a/T| \leq |a|/\rho < 1$, 几何级数给出

$$\frac{1}{T-a} = \sum_{n \geq 0} a^n T^{-n-1}, \quad \left\| \frac{1}{T-a} - \sum_{n=0}^N a^n T^{-n-1} \right\|_{W_\rho} = \rho^{-1} \left(\frac{|a|}{\rho} \right)^{N+1}.$$

这里出现的无限负次幂不是额外的极点; 它们共同表示在圆环上没有极点的 $1/(T-a)$. 被排除的点 $T = a$ 位于圆环的孔中.

例 3.49 (一个函数, 两种展开). 仍取 $0 < |a| < 1$. 在闭圆盘 $|T| \leq r, 0 < r < |a|$ 上, 有 $\frac{1}{T-a} = -\sum_{n \geq 0} a^{-n-1} T^n$; 在闭圆环 $|a| < \rho \leq |T| \leq 1$ 上, 则有 $\frac{1}{T-a} = \sum_{n \geq 0} a^n T^{-n-1}$. 前者使用 $|T/a| < 1$, 后者使用 $|a/T| < 1$. 两者是同一个有理函数在不同区域的收敛表达, 不是两个不同的函数.

圆盘与圆环之间, $|T| = |a|$ 的点也不能一概排除. 若 $b \in K, |b| \leq 1$ 且 $b \neq a$, 则在 $|T-b| \leq s, 0 < s < |b-a|$ 上, $\frac{1}{T-a} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (T-b)^n}{(b-a)^{n+1}}$. 因此某一次展开不收敛, 不等于函数在该点有极点. 这与代数分式需要考虑所有合法表示是同样的道理.

例 3.50 (穿孔圆盘上的倒数). 在 $X = \mathcal{M}(K\langle T \rangle)$ 中, $U = \{x : |T|_x > 0\}$ 是开集, 恰好删去经典点 $T = 0$. 函数 $1/T$ 在每个闭圆环 $W_\rho \subset U$ 上都解析, 且这些表达彼此一致. 每个 $x \in U$ 都可取 $0 < \rho < |T|_x$, 使 x 的开邻域 $\{|T| > \rho\}$ 包含于这个圆环. 因此 $1/T$ 在整个 U 上解析.

它不能延拓成整个闭单位圆盘上的解析函数 $h \in K\langle T \rangle$. 否则在 Gauß 点 x_G 处有 $(Th - 1)(x_G) = 0$. 该点的支撑为零, 故 $Th - 1 = 0$ 于 $K\langle T \rangle$, 再在 $T = 0$ 处取值便得矛盾.

例如开圆盘 $\{|T| < 1\}$ 上, 一个以 T 展开的级数只须满足: 对每个 $0 < r < 1$, 都有 $|\alpha_n|r^n \rightarrow 0$. 所以它的系数未必趋于零. 闭圆盘上的函数需要连同边界一起收敛, 这正是 $K(T)$ 的条件. 解析函数环既记录允许的除法, 也记录区域的大小与收敛要求.

3.3.5 带函数层的空间

环层把一个空间各个开集上的函数同时记录下来. 称拓扑空间 X 连同其上的环层 $\mathcal{O}_X$ 为带环空间 (ringed space). 空间相同而函数层不同, 得到的几何结构也可能不同.

对整环, 前面已经直接构造了 $\text{Spec} A$ 上的正则函数环层. 对一般交换环 A , 主开集 $D(f)$ 上“允许除以 f ”可以用熟悉的商环写成

$$\mathcal{O}_X(D(f)) \simeq A[S]/(fS - 1).$$

变量 S 表示 $1/f$, 所以商环中的元素都可以写成 a/f^n 的形式; 这里 a/f^n 是商环元素 aS^n 的记号, 并不假设 A 嵌入某个分式域. 若 $D(g) \subset D(f)$, 根理想判据给出 $g^N = cf$, 其中 $N \geq 1, c \in A$. 在 $D(g)$ 上, f 的逆元因而可以写成 c/g^N ; 把 S 送到此逆元, 就得到从 $D(f)$ 到 $D(g)$ 的限制同态. 逆元唯一, 故限制不依赖表达的选择.

这些主开集函数环及其限制确定 $\text{Spec} A$ 上的一个环层, 称为结构层 (structure sheaf), 记为 $\mathcal{O}_X$. 其任意开集上的函数由主开集上的相容表达给出.¹ 特别地, 取 $f = 1$ 得到 $\mathcal{O}_X(X) \simeq A[S]/(S - 1) \simeq A$.

例 3.51 (中国剩余定理与两块上的函数). 令 $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, 以横线表示整数在 A 中的像. 其素谱只有 $(\bar{2})$ 、 $(\bar{3})$ 两点. 它们分别组成开集 $D(\bar{3})$ 与 $D(\bar{2})$, 且两者不交. 在第一块上令 $\bar{3}$ 可逆, 由 $3 \cdot 4 = 0$ 得到 $4 = 0$, 因而函数环是 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$; 反过来, 3 在此商环中本来就可逆, 所以没有再加别的关系. 同理, 第二块的函数环为 $\mathbb{F}_3$. 两块上的函数可以独立指定, 合成的全局函数正是中国剩余定理 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{F}_3$ 所给出的元素.

函数 $\bar{6} \neq 0$ 在两个剩余域 $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$ 中都取零, 但在两块的函数环中对应 $(\bar{2}, 0)$, 并未消失. 因此结构层不能简单地定义成“所有逐点取值的集合”: 局部函数环可以保留剩余域看不到的信息.

例 3.52 (两条轴分开以后). 令 $A = k[X, Y]/(XY)$, 以 x, y 记变量的像. 方程 $XY = 0$ 表示两条坐标轴, 交点对应 (x, y) . 在 $D(x)$ 上, x 可逆, 故 $xy = 0$ 强迫 $y = 0$; 相应的函数环为 $k[x, x^{-1}]$. 同理, $D(y)$ 上的函数环为 $k[y, y^{-1}]$. 由于 $D(x) \cap D(y) = D(xy) = \emptyset$, 删去交点后得到的开集 $U = D(x) \cup D(y)$ 上有 $\mathcal{O}_X(U) = k[x, x^{-1}] \times k[y, y^{-1}]$.

例如在第一条轴上取 1, 在第二条轴上取 0, 就得到 U 上的正则函数. 它却不能延拓到整个空间: 一个全局多项式 $P(X, Y)$ 在两条轴上的限制 $P(X, 0), P(0, Y)$ 必有相

¹一般交换环的这一构造采用标准的结构层结论, 见 [2] 第 I 章, 1.3.4 与 1.3.7; 此处不展开一般情形的存在性证明. 整环的构造与环层性质已在前文直接验证.

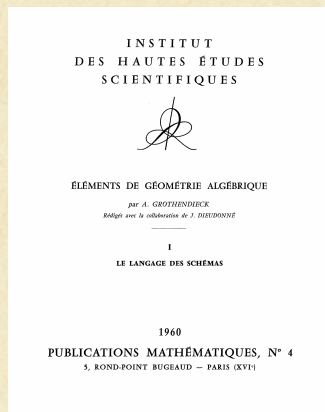
同的常数项 $P(0, 0)$, 不可能分别恒等于 1, 0. 交点存在时, 两条轴上的函数必须在那里一致; 删去交点后, 这一约束就消失了.

定义 3.53 (仿射概形). 交换环 A 的素谱连同其正则函数结构层 $(\text{Spec} A, \mathcal{O}_{\text{Spec} A})$, 称为 A 定义的仿射概形 (*affine scheme*). 若一个带环空间可以通过同胚及各开集上与限制相容的环同构识别为这样的空间, 也称它为仿射概形.

Grothendieck 与 Dieudonné 的《代数几何基础》第一卷 (1960) 正是这样组织仿射几何: 把环元素解释为函数, 把剩余域作为点值的容器, 再用结构层记录各个开集上的正则函数 [2] 第 I 章, 1.1.1, 1.3.4 与 1.3.7. 这一观点使整数环与多项式环能够接受同样的几何处理. 所得空间不必是复流形: 它容许奇点、有限特征以及不同的剩余域; 与复几何相通之处, 在于用局部函数及其限制描述空间.



Alexander Grothendieck



Grothendieck 与 Dieudonné,《代数几何基础》第一卷
《概形的语言》, 1960 年原刊扉页.²

在非阿基米德解析几何中, 给定正实数 $r_1, \dots, r_n$, 有限变量的收敛级数代数 $K\langle r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n \rangle$ 由满足 $|a_\nu| r_1^{\nu_1} \dots r_n^{\nu_n} \rightarrow 0$ 的幂级数组成, 范数为这些加权系数大小的最大值. 这里趋于零表示: 对每个 $\epsilon > 0$, 只有有限个加权系数的大小不小于 ϵ . 它关于闭理想的商, 配以商范数, 称为 K 上的类仿射代数 (*affinoid algebra*). 例如 $K\langle T \rangle$ 与上面的小圆盘代数 B_r 都是类仿射代数.

对类仿射代数 $A, X = \mathcal{M}(A)$ 配有标准的解析函数结构: 普通开集 U 上的解析函数组成环 $\mathcal{O}_X^{\text{an}}(U)$, 它们及其限制映射构成解析结构层, 且 $\mathcal{O}_X^{\text{an}}(X) \simeq A$.³ 局部的函数仍以 $\mathcal{H}(x)$ 为完备取值域; 在圆盘和圆环上, 这就是把收敛级数中的变量代入 $T(x)$. 解析结构保留函数的代数表达, 不只是它们逐点的大小或取值.

²肖像来源: MacTutor 的 Grothendieck 人物页. 扉页来源: NUMDAM, IHÉS 第 4 卷原刊, PDF 第 2 页; 原刊版权归 Publications mathématiques de l'IHÉS (1960).

³这里使用类仿射空间的标准解析结构层及其全局函数环的性质; 一般构造不在此证明, 见 [3] 第 3.3 节与第 4.2.1 节. 上述圆盘与圆环的级数环是这一结构的具体实例.

定义 3.54 (Berkovich 类仿射解析空间). 保留 K -类仿射代数 A 的 *Banach* 结构, 为 $\mathcal{M}(A)$ 配备上述标准解析结构, 所得对象称为 A 定义的 Berkovich 类仿射解析空间 (*Berkovich affinoid analytic space*). 其普通开集上的带环空间记为 $(\mathcal{M}(A), \mathcal{O}_{\mathcal{M}(A)}^{\text{an}})$.

Berkovich 在 1990 年的专著中把有界乘法半范数的谱与解析函数结构放在一起 [1]. 它延续了 Gelfand 谱从代数元素得到函数的思想, 同时把非阿基米德的圆盘、圆环及其收敛函数纳入几何. 这里的类仿射假设规定了所用的函数代数; 不能把任意 Banach 代数的谱都直接称为类仿射解析空间.

两种几何的全局函数环都是原来的 A , 但局部函数不同: 在 $\text{Spec } k[T]$ 的 $D(T)$ 上, 允许的是有限 Laurent 多项式; 在解析圆环上, 则使用满足收敛条件的 Laurent 级数; 底域赋值非平凡时, 其中还包含无限级数. 而 6 与 $1/6$ 、 T 与 $1/T$, 分别说明全局函数、局部函数及其定义域之间的关系.

习题

- (1) 设 $A = C([0, 1], \mathbb{R})$. 证明在 $x \in [0, 1]$ 处取值的核为极大理想; 若 $x \neq y$, 用函数 $t \mapsto t - x$ 证明这两个核不同.
- (2) 在 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上计算函数 30 的零点集, 以及它在 (7) 、 (11) 、 (0) 处的值. 求 $7/30$ 的最大正则区域, 并计算它在 (11) 处的值.
- (3) 在 $\text{Spec } \mathbb{R}[T]$ 的点 $\mathfrak{p} = (T^2 + 1)$ 处, 计算 $T^3 + 2T + 1$ 与 $1/(T - 1)$ 的值. 用 $\alpha = T \bmod \mathfrak{p}$ 表示答案, 再选 $\alpha \mapsto i$ 写成复数. 为什么 $1/(T^2 + 1)$ 不能在该点取值?
- (4) 在 $\text{Spec } \mathbb{Z}[i]$ 上求 $1/(2 + i)$ 的最大正则区域, 并计算它在 $(2 - i)$ 处的值. 与 $1/5$ 的正则区域比较, 解释二者为何不同.
- (5) 在 $\text{Spec } \mathbb{F}_p[T]$ 上, 证明 $T^p - T$ 的零点恰为 $(T - a)$ 、 $a \in \mathbb{F}_p$. 解释它为什么不是零函数.
- (6) 在 $\text{Spec } k[T]$ 上求 $(T^3 - T)/T$ 与 $1/(T(T - 1))$ 的最大正则区域. 计算前者在 (T) 处的值, 说明书写中的零分母为何不一定是极点.
- (7) 在 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上, 证明 $D(6) \cup D(35) = X$, 并在 $\mathbb{Q}$ 中计算 $\mathbb{Z}[1/6] \cap \mathbb{Z}[1/35]$. 用此结果解释这个覆盖上的相容函数如何合成全局函数.
- (8) 在 $\text{Spec } k[T]$ 上, 证明 $D(T) \cup D(T - 1) = X$. 设 $a, b \in k[T]$ 、 $m, n \geq 0$, 且 $a/T^m = b/(T - 1)^n$ 于 $k(T)$, 利用 T^m 与 $(T - 1)^n$ 互素, 证明这个共同函数属于 $k[T]$.

- (9) 设 $A = k \times k$. 写出其素谱的全部开集, 以及每个开集的函数环和所有限制映射. 对两单点开集的覆盖, 直接核查环层定义.
- (10) 设 $A = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. 证明 $a + b\varepsilon$ 是单位当且仅当 $a \neq 0$, 并在可逆时写出逆元. 解释为什么 ε 的点值为零却不是零函数.
- (11) 取 $x = x_{a,r} \in \mathcal{M}(K\langle T \rangle)$, $|a| \leq 1, 0 < r \leq 1$. 计算 $|(T - b)(x)|$, 并说明 $T(x)$ 为什么不可能属于 K . 对经典点 $x_{a,0}$, 答案有何变化?
- (12) 对 $0 < r < 1$, 证明 $K\langle T \rangle \rightarrow K\langle r^{-1}T \rangle$ 是单射且范数不增, 但不是满射. 计算 $\sum_{n \geq 0} T^n$ 在小圆盘上的范数及第 N 个部分和的误差.
- (13) 设 $0 < |a| < 1$. 分别在 $|T| \leq r, 0 < r < |a|$ 和 $|a| < \rho \leq |T| \leq 1$ 上展开 $1/(T - a)$, 计算其范数及部分和误差. 若 $|b| = |a|, b \neq a$, 再写出它在以 b 为心的小圆盘上的展开.
- (14) $\star$ 令 $A = k[X, Y], U = D(X) \cup D(Y) = \text{Spec} A \setminus \{(X, Y)\}$. 证明 $\mathcal{O}(U) = k[X, Y]$: 设 $a, b \in A, m, n \geq 0$, 若 $a/X^m = b/Y^n$, 由 $aY^n = bX^m$ 及 $A/(X) \simeq k[Y]$ 是整环, 逐次证明 $X^m \mid a$. 这说明删去平面原点并不产生新的正则函数; 与直线上删去原点后出现 $1/T$ 的情形比较.

参考文献与延伸阅读

- [1] BERKOVICH V G. Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-Archimedean Fields: vol. 33[M/OL]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1990. DOI: [10.1090/surv/033](https://doi.org/10.1090/surv/033).
- [2] GROTHENDIECK A, DIEUDONNÉ J. Éléments de géométrie algébrique: I. Le langage des schémas[J/OL]. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 1960, 4: 5-228. https://numdam.org/item/PMIHES_1960__4__5_0/.
- [3] TEMKIN M. Introduction to Berkovich Analytic Spaces[EB/OL]. 2011. https://math.huji.ac.il/~temkin/papers/Introduction_to_Berkovich_Spaces.pdf. arXiv: 1010.2235.