

4.1 第 10 讲 模的基本概念

4.1.1 从线性空间到模

线性代数研究域上的向量空间和线性变换. 在数学中, 我们经常需要系数取自环而非域. 把系数域换成环, 并保留基本的线性公理, 便将向量空间推广到模. 然而模并非向量空间的推广那么简单, 它作为线性对象依赖于系数环, 是非常灵活的相对概念, 使得交换代数中众多研究对象(如环同态、环上的代数)都以模结构作为底层结构.

本讲中的环均为交换含幺环, 环同态保持幺元; 通常记 A 为这样的环, k 表示域.

定义 4.1. 一个 A -模(A -module)是一个阿贝尔群 $(M, +)$, 连同映射

$$A \times M \longrightarrow M, \quad (a, m) \longmapsto am,$$

使得对任意 $a, b \in A$ 与 $m, n \in M$, 都有

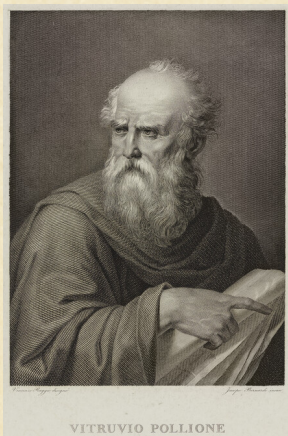
$$\begin{aligned} a(m + n) &= am + an, & (a + b)m &= am + bm, \\ (ab)m &= a(bm), & 1_A m &= m. \end{aligned}$$

这个映射称为 A 在 M 上的数乘或作用.

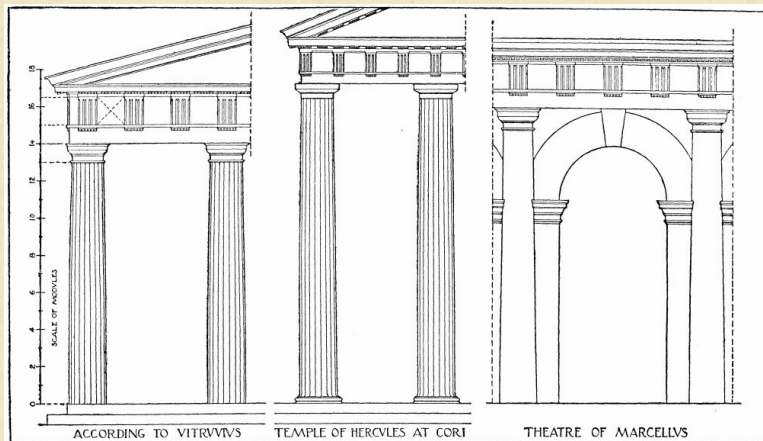
〔史略〕 模的多重含义: 尺度、同余与线性结构

Module 溯源于拉丁文 *modulus*, 原意为“小尺度”或“量度”. 建筑中的“模数”即选定基本长度, 再用它规定各构件的比例. 古罗马建筑师 Vitruvius (维特鲁威, 活跃于公元前一世纪) 在所著《建筑十书》中, 用 *modulus* 称呼这种基准长度. 书中一种多立克柱式以 μ 为模数: 柱身底部直径为 2μ , 含柱头的柱高为 14μ , 柱头本身高为 μ . 改变 μ 就改变建筑大小而比例不变. 法文 *module* 的建筑学用例至少可追溯到 Jean Martin 于 1547 年出版的《建筑十书》译本.

代数中“模”一词多义, 例如涉及同余的模运算, 环上的模, 乃至分类问题(亦称为模问题)和模空间. 这些译法并非巧合, 上述概念均起源于尺度和度量之意. Gauß 在 1801 年《算术研究》的开篇, 把同余 $a \equiv b \pmod{n}$ 中的整数 n 称为 *modulus* [3]§§1-2, 即 a 和 b 的差恰好可以用 n 来度量. 条件 $n \mid (a - b)$ 也就是 $a - b \in n\mathbb{Z}$; 同余关系因而可以由加法子群 $n\mathbb{Z}$ 来描述.



Vitruvius 想象像.
Jacopo Bernardi 刻, 约
1830 年.



多立克柱式比例图,《建筑十书》1914 年英译本插图. 图内从左至右为
Vitruvius 方案、科里赫拉克勒斯神庙、罗马马尔凯鲁斯剧场的柱式; 左侧
刻度以模数为单位.¹

1871 年, Dedekind 在 Dirichlet 《数论讲义》第二版补篇中, 把对加法与减法封闭的非空实数或复数集 M 称为 *Modul*, 并以 $\alpha - \beta \in M$ 定义 $\alpha \equiv \beta \pmod{M}$ [2]^{§161, p. 442}. 例如, 两复数“模 $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ 同余”是指它们的实部之差、虚部之差都是整数. Dedekind 在 1877 年的论文中进一步以模的和、交及同余类为代数整数理论作准备 [1]^{§§1-2, pp. 18-20}.

按今天的语言, 这些数集都是 $\mathbb{Z}$ -模: 对加减法封闭, 也就对整数倍封闭. 允许一般环的元素充当系数, 并以抽象阿贝尔群代替具体数集, 便得到现代的模概念. Noether 在 1929 年的《超复数与表示论》中, 把模与理想作为带有环元素乘法作用的加法阿贝尔群来研究, 借此将理想论与表示论放在同一框架中 [4]^{p. 643}.

模的元素之间只有加法; 数乘 am 的第一个因子来自 A , 第二个因子来自 M . 除非另有代数结构, 否则两个元素 $m, n \in M$ 的乘积 mn 没有意义. 由模公理立即得到

$$0_A m = 0_M, \quad a 0_M = 0_M, \quad (-a)m = -(am) = a(-m).$$

例如, 第一式由 $0_A m = (0_A + 0_A)m = 0_A m + 0_A m$ 及加法消去律得到. 当 $A = k$ 为域时, A -模正是 k -向量空间; 模论因此是线性代数在环上的推广.

另有一种等价表述. 记 $\text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ 为从阿贝尔群 M 到自身的群同态构成的非交换环, 乘法为映射复合. 每个 $a \in A$ 给出群同态 $\rho(a) : M \rightarrow M, m \mapsto am$. 模公理恰说明

$$\rho : A \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$$

¹词源见 Lewis-Short, *A Latin Dictionary* (1879), *modulus* 条; 1547 年的法文用例见 CNRTL 的 *module* 词条词源部分. Vitruvius 的生卒年未能确考, 参见 MacTutor 传记; 基准长度及比例见《建筑十书》IV.3.3-4 拉丁原文. 左图: Jacopo Bernardi 据 Vincenzo Raggio 原作刻制, Hood Museum 藏品 PR.X.224, 馆方断代为约 1830 年. 右图: Morris Hicky Morgan 英译 *The Ten Books on Architecture*, Harvard University Press, 1914 年, 第 111 页; 插图由 Herbert Langford Warren 主持编制, Project Gutenberg 图源.

是保持么元的环同态. 因而, 一个 A -模结构也就是环 A 在某个阿贝尔群上的线性作用.

4.1.2 若干基本例子

例 4.2 (阿贝尔群作为 $\mathbb{Z}$ -模). 每个阿贝尔群 M 都有唯一的 $\mathbb{Z}$ -模结构. 对任意 $m \in M$ 和整数 $n > 0$, 数乘 nm 是 n 个 m 的和; 令 $0m = 0$, 并令 $(-n)m = -(nm)$, 这给出 M 的 $\mathbb{Z}$ -模结构. 反过来, 任意 $\mathbb{Z}$ -模的数乘都由这些公式确定. 因此, 我们有等价概念

$$\mathbb{Z}\text{-模} \Leftrightarrow \text{阿贝尔群}.$$

例 4.3. 环 A 本身、它的理想 I 以及乘积环 A^r 都是 A -模. 此外, 商环 A/I 上的数乘

$$a(b + I) = ab + I$$

使它成为 A -模. 例如, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 由 $\bar{1}$ 生成, 并满足 $n\bar{1} = 0$. 这说明一般的模可能含有非零元素 m , 使某个非零系数 a 零化它, 即 $am = 0$.

例 4.4. 方程 $2x + 3y = 0$ 的整数解恰为 $(x, y) = n(3, -2)$, $n \in \mathbb{Z}$. 解集因此是 $\mathbb{Z}^2$ 的一个子模 $3\mathbb{Z} \times (-2)\mathbb{Z}$; 若改在 $\mathbb{Q}^2$ 中求解, 则得到由 $(3, -2)$ 张成的一维 $\mathbb{Q}$ -向量空间.

例 4.5 (算子与多项式环作用). 给定 k -向量空间 E 及线性算子 $S: E \rightarrow E$, 多项式环 $k[T]$ 在 E 上的作用依如下方式给出: 对任意向量 $v \in E$, 有

$$T \cdot v = S(v), \quad \left(\sum_{j=0}^d a_j T^j\right) \cdot v = \sum_{j=0}^d a_j S^j(v),$$

便使 E 成为 $k[T]$ -模. 反过来, 任一 $k[T]$ -模在限制系数到 k 后是 k -向量空间, 而 T 的作用按定义, 恰好给出一 k -线性算子. 类似论证适用于 $k[T]$ -子模, 因此有如下等价

$$k[T]\text{-模} \Leftrightarrow \text{指定线性算子作用 } S \text{ 的 } k\text{-向量空间 } E.$$

$$k[T]\text{-子模} \Leftrightarrow S\text{-不变子空间}.$$

例 4.6 (常系数微分算子). 上例中取 $k = \mathbb{C}$, $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $S = d/dx$. 常系数线性微分方程可写成 $p(T)f = 0$, 其中 $p(T) \in \mathbb{C}[T]$. 例如, $T^2 + 1$ 的作用为 $f \mapsto f'' + f$.

例 4.7. 设 X 为紧拓扑空间, E 为复 Banach 空间. 回忆例 1.46, 在一致范数 $\|f\|_\infty = \max_{x \in X} |f(x)|$ 下, $(C(X, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ 是交换复 Banach 代数. 类似地, $C(X, E)$ 在一致范数下也是 Banach 空间. 连续函数 $s \in C(X, E)$ 在每个点 $x \in X$ 取值为向量 $s(x) \in E$. 等价地, 映射 $x \mapsto (x, s(x))$ 是投影 $X \times E \rightarrow X$ 的连续截面. 对 $f \in (C(X, \mathbb{C}))$, 定义

$$(f \cdot s)(x) = f(x)s(x), \quad x \in X.$$

右端是复数 $f(x)$ 与向量 $s(x)$ 的数乘, 所得函数仍连续; 这使 $C(X, E)$ 成为 $(C(X, \mathbb{C})$ -模. 该模结构还保留了函数空间的范数结构: 在一致范数下有估计

$$\|f \cdot s\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|s\|_\infty,$$

使得数乘 $C(X, \mathbb{C}) \times C(X, E) \rightarrow C(X, E)$ 是连续的双线性映射. 等价地, 每个 $f \in C(X, \mathbb{C})$ 都定义有界乘法算子 $M_f: C(X, E) \rightarrow C(X, E)$, $s \mapsto f \cdot s$, 满足

$$\|M_f\| \leq \|f\|_\infty.$$

若 $E \neq 0$, 取常值单位向量截面可取到等号 $\|M_f\| = \|f\|_\infty$. 总之, $C(X, E)$ 不仅是模, 还是压缩 Banach $C(X, \mathbb{C})$ -模, 且每个函数 f 对应于一个有界乘法算子.

定义 4.8 (Banach 模). 设 K 为完备赋值域, A 为交换 Banach K -代数. 一个 Banach A -模是一个 Banach K -空间 M , 连同一个 A -模结构

$$A \times M \longrightarrow M, \quad (a, m) \longmapsto am,$$

使得该模作用是有界的: 存在常数 $C > 0$, 使

$$\|am\|_M \leq C\|a\|_A\|m\|_M$$

对所有 $a \in A, m \in M$ 成立. 这里“含么”是指 $1_A m = m$. 若上式可以取 $C = 1$, 则称 M 为压缩的 Banach A -模 (contractive Banach A -module).

例 4.9 (序列空间上的对角乘法). 以下序列均取复数值. 对 $1 \leq p < \infty$, 记

$$\ell^p = \{x = (x_n)_{n \geq 1} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

再令

$$\ell^\infty = \{a = (a_n)_{n \geq 1} : \sup_{n \geq 1} |a_n| < \infty\}, \quad \|a\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |a_n|.$$

在逐坐标加法和逐坐标乘法 $(a+b)_n = a_n + b_n, (ab)_n = a_n b_n$ 下, ℓ^∞ 是交换 Banach 代数; 其么元是常值序列 $\mathbf{1} = (1, 1, \dots)$. 定义 $a \in \ell^\infty$ 对 $x \in \ell^p$ 的作用为逐坐标乘法

$$a \cdot x = (a_n x_n)_{n \geq 1}.$$

注意符号 $\cdot$ 表示 ℓ^∞ 中的序列在 ℓ^p 中的序列的作用, 并非内积. 若 $1 \leq p < \infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n|^p \leq \|a\|_\infty^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p;$$

当 $p = \infty$ 时, 则有 $\sup_n |a_n x_n| \leq \|a\|_\infty \|x\|_\infty$. 因此在两种情形下 $a \cdot x$ 都仍属于 ℓ^p , 并且

$$\|a \cdot x\|_p \leq \|a\|_\infty \|x\|_p.$$

因而 $\ell^p (1 \leq p \leq \infty)$ 都是 ℓ^∞ -模. 每个 $a \in \ell^\infty$ 都给出一个有界对角算子

$$M_a : \ell^p \longrightarrow \ell^p, \quad M_a(x) = a \cdot x$$

且满足 $M_a M_b = M_{ab}$ 和 $M_1 = \text{id}_{\ell^p}$. 因而 ℓ^∞ 可视作 ℓ^p 上的对角乘法算子代数.

4.1.3 模同态、子模与商模

模同态用来比较两个模, 它的核与像自然形成子模. 我们介绍模同态的第一同构定理: 模同态在模掉其核以后, 便成为到其像的同构.

定义 4.10. 设 M, N 为 A -模, 并设 $u : M \rightarrow N$ 是映射. 若

$$u(m + m') = u(m) + u(m'), \quad u(am) = au(m)$$

对所有 $m, m' \in M, a \in A$ 成立, 就称 u 为 A -线性映射或模同态 (*module homomorphism*). 双射的模同态称为模同构. 全体模同态构成的集合记为 $\text{Hom}_A(M, N)$.

模 M 的加法子群 L 若满足 $a\ell \in L (a \in A, \ell \in L)$, 就称为 M 的子模 (*submodule*).

设 L 是 M 的子模. 在商阿贝尔群 M/L 上规定 $a(m + L) = am + L$. 这一数乘使 M/L 成为 A -模, 称为 M 对 L 的商模 (*quotient module*).

商模的数乘与代表元的选择无关: 若 $m - m' \in L$, 则 $a(m - m') \in L$, 故 $am + L = am' + L$. 典范投影 $q_L : M \rightarrow M/L, m \mapsto m + L$ 是满的 A -模同态.

例 4.11 (线性算子的交织映射). 延续例 4.5 的设定. 设 E, F 为 k -向量空间, $S : E \rightarrow E$ 与 $R : F \rightarrow F$ 为线性算子, 使得 E 和 F 成为 $k[T]$ -模. k -线性映射 $u : E \rightarrow F$ 若满足

$$u \circ S = R \circ u,$$

则称 u 是 S 与 R 的交织映射 (*intertwining map*). 上示条件表面下图交换:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{S} & E \\ u \downarrow & & \downarrow u \\ F & \xrightarrow{R} & F. \end{array}$$

由 $uS = Ru$ 归纳得到 $uS^n = R^n u$. 因而对每个 $p \in k[T]$ 和 $v \in E$, 都有

$$u(p(S)v) = p(R)u(v).$$

反过来, 从 E 到 F 的 $k[T]$ -模同态中取 $p = T$, 即得 $uS = Ru$. 由此得到等价概念

$$\text{线性算子 } S \text{ 和 } R \text{ 的交织映射} \iff k[T]\text{-模同态 } u: E \rightarrow F.$$

交织映射不仅保持向量空间结构, 还保持算子的全部多项式运算. 例如, 若 $Sv = \lambda v$ 且 $u(v) \neq 0$, 则 $R(u(v)) = \lambda u(v)$, 所以 u 保持相应的特征值. 若 u 可逆, 则有

$$R = uSu^{-1}.$$

一般情形可依如下方法归结到上述可逆情形. 若 $v \in \ker u$, 则 $u(Sv) = R(u(v)) = 0$, 所以 $\ker u$ 是 S -不变子空间; 若 $w = u(v) \in \operatorname{im} u$, 则 $Rw = u(Sv) \in \operatorname{im} u$, 所以 $\operatorname{im} u$ 是 R -不变子空间. 于是 S 在 $E/\ker u$ 上诱导算子

$$\bar{S}(v + \ker u) = Sv + \ker u,$$

从而 u 诱导一个可逆的交织映射

$$\bar{u}: E/\ker u \rightarrow \operatorname{im} u, \quad v + \ker u \mapsto u(v),$$

并且 $\bar{u}\bar{S} = (R|_{\operatorname{im} u})\bar{u}$. 这正是下面的第一同构定理在算子语言中的内容.

定理 4.12 (模的第一同构定理). 设 $u: M \rightarrow N$ 为 A -模同态. 则 $\ker u$ 是 M 的子模, $\operatorname{im} u$ 是 N 的子模, 并且以下映射是 A -模同构:

$$M/\ker u \rightarrow \operatorname{im} u, \quad m + \ker u \mapsto u(m).$$

证明. 若 $m, m' \in \ker u$ 且 $a \in A$, 则 $u(m - m') = 0$, $u(am) = au(m) = 0$, 故核是子模. 若 $y = u(m), y' = u(m') \in \operatorname{im} u$, 则 $y - y' = u(m - m')$, $ay = u(am)$ 仍属于像, 故像也是子模. 由此, 所给映射有定义并且保持加法和数乘. 它显然为满射; 而 $u(m) = u(m')$ 当且仅当 $m - m' \in \ker u$, 所以它也是单射. $\square$

例 4.13 (向量值函数在一点处取值). 设 X 为紧拓扑空间, E 为复 Banach 空间, 并记 $A = C(X, \mathbb{C})$. 固定 $x \in X$, 通过 $f \cdot v = f(x)v$ 把 E 视为 A -模. 取值映射

$$\operatorname{ev}_x: C(X, E) \rightarrow E, \quad s \mapsto s(x)$$

是满的 A -模同态, 其核由所有在 x 处取零值的函数组成. 因此, 定理 4.12 给出

$$C(X, E) / \ker(\text{ev}_x) \simeq E.$$

在这个例子中, 对核取商恰好保留了函数在指定点的取值.

命题 4.14 (同态模与自同态环). 设 M, N 为 A -模. 对 $v, w \in \text{Hom}_A(M, N)$ 、 $a \in A$, 令

$$(v + w)(m) = v(m) + w(m), \quad (av)(m) = a v(m),$$

使 $\text{Hom}_A(M, N)$ 成为 A -模. 特别地, 如下集合在加法与映射复合下构成环(未必交换)

$$\text{End}_A(M) = \text{Hom}_A(M, M).$$

证明. 先验证所规定的加法与数乘给出 A -线性映射. 例如, 对 $b \in A$, 利用 A 的交换性,

$$(av)(bm) = a v(bm) = ab v(m) = b(av)(m).$$

加法的线性性验证相同; 其余模公理逐点归结为 N 中的模公理. 最后, 模同态的复合仍为模同态, 复合满足结合律, 恒等映射是乘法幺元, 且复合对加法满足分配律, 故 $\text{End}_A(M)$ 构成环, 其可能具有的非交换性来自于映射复合的潜在非交换性. $\square$

例 4.15 (自由模之间的同态与矩阵). 若 $e_1, \dots, e_m$ 是 A^m 的标准基, 则 $u: A^m \rightarrow A^n$ 由 $u(e_1), \dots, u(e_m)$ 唯一确定. 把这些向量依次写成列, 得到

$$\text{Hom}_A(A^m, A^n) \simeq \text{Mat}_{n \times m}(A).$$

在此对应下, 映射的复合是矩阵乘法. 这是线性代数中的矩阵在一般交换环上的延续.

4.1.4 生成元、关系与自由模

定义 4.16. 设 M 为 A -模. 子集 $S \subseteq M$ 生成的子模是包含 S 的最小子模, 记为 $\langle S \rangle_A$. 它恰由所有有限和 $a_1 s_1 + \dots + a_r s_r$ 组成, 其中 $a_i \in A, s_i \in S$. 若 $\langle S \rangle_A = M$, 则称 S 是 M 的一组生成元; 若可取有限的 S , 则称 M 有限生成 (*finitely generated*).

若等式 $a_1 s_1 + \dots + a_r s_r = 0$ 对任意互异的 $s_1, \dots, s_r \in S$ 都蕴含 $a_1 = \dots = a_r = 0$, 则称 S 线性无关. 既生成 M 又线性无关的集合称为 M 的一组基 (*basis*). 若 M 有一组基, 就称 M 是自由 A -模 (*free A -module*).

一族 A -模 $(M_i)_{i \in I}$ 的直和 $\bigoplus_{i \in I} M_i$ 由有限个非零分量的序列 $(m_i)_{i \in I}$ 组成; 加法和数乘按分量定义. 有限直和 $M_1 \oplus \dots \oplus M_r$ 与笛卡儿积 $M_1 \times \dots \times M_r$ 相同.

〔旁注〕 自由模上的映射由一组基上的取值唯一决定

设 M 是以 S 为基的自由 A -模. 给定任意 A -模 N 和任意集合映射 $\varphi: S \rightarrow N$, 存在唯一的 A -模同态 $\tilde{\varphi}: M \rightarrow N$, 使 $\tilde{\varphi}(s) = \varphi(s)$ 对所有 $s \in S$ 成立.

事实上, 每个 $m \in M$ 唯一写成有限和 $m = \sum_{s \in S} a_s s$, 因而只能规定

$$\tilde{\varphi}(m) = \sum_{s \in S} a_s \varphi(s).$$

表示的唯一性保证这个公式有定义; 直接计算可见它是 A -线性的.

当 $S = \{1, \dots, r\}$ 时, 对应的自由模是 A^r ; 对任意集合 S , 记 S 为基的自由模为

$$A^{(S)} = \bigoplus_{s \in S} A.$$

它的标准基由在第 s 个分量取 1、其余分量取 0 的元素 e_s 组成.

命题 4.17 (有限生成模是有限秩自由模的商). 设 M 为 A -模. 则 M 有限生成, 当且仅当存在非负整数 r 及子模 $L \subseteq A^r$, 使得 $M \simeq A^r/L$. 这里约定 $A^0 = 0$.

证明. 若 $m_1, \dots, m_r$ 生成 M , 则映射

$$\pi: A^r \longrightarrow M, \quad (a_1, \dots, a_r) \longmapsto a_1 m_1 + \dots + a_r m_r$$

保持加法与 A -数乘, 且其像为 M , 故为满的 A -模同态. 取 $L = \ker \pi$, 由第一同构定理得到 $M \simeq A^r/L$. 反之, A^r 的标准基 $e_1, \dots, e_r$ 在商模中的像生成 A^r/L ; 经给定同构送到 M 后, 便得到 M 的一组有限生成元. $\square$

对选定的生成元 $m_1, \dots, m_r$, 子模 $L = \ker \pi$ 由所有满足 $a_1 m_1 + \dots + a_r m_r = 0$ 的系数元组 $(a_1, \dots, a_r)$ 组成, 称为这组生成元的关系模. 两个系数元组表示 M 中的同一元素, 当且仅当它们的差属于 L ; 这就是用生成元与关系描述 M 的含义.

例 4.18. 有限循环模 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 作为 $\mathbb{Z}$ -模, 由 $\bar{1}$ 生成, 却满足 $n\bar{1} = 0$, 所以它不是自由 $\mathbb{Z}$ -模.

例 4.19. 在 $A = k[X, Y]$ 中, 理想 $I = (X, Y)$ 由 X, Y 生成, 并有关系

$$(-Y)X + XY = 0.$$

它不是单个元素生成的模(又称循环模): 若 $I = (f)$, 则 f 同时整除 X 与 Y , 于是 f 是单位, 这会推出 $I = A$, 与 $1 \notin (X, Y)$ 矛盾.

习题

- (1) 模公理的直接推论. 从定义出发证明 $0_A m = 0_M$ 、 $a 0_M = 0_M$ 、 $(-a)m = -(am) = a(-m)$. 说明证明中的消去发生在 M 的加法群中, 而不是在环 A 的乘法中.
- (2) $\mathbb{Z}$ -模与阿贝尔群. 证明一个阿贝尔群上存在唯一的含幺 $\mathbb{Z}$ -模结构. 由此说明阿贝尔群同态与 $\mathbb{Z}$ -模同态是同一种映射.
- (3) 循环模. 设 M 是由一个元素 m 生成的 A -模. 令 $I = \{a \in A : am = 0\}$. 证明 I 是理想, 并构造同构 $A/I \simeq M$.
- (4) 商模的子模. 设 $I \subseteq A$ 为理想. 证明 A/I 的子模与包含 I 的理想 $J \subseteq A$ 一一对应, 对应由 $J \mapsto J/I$ 给出.
- (5) 算子与不变子空间. 设线性算子 $S: E \rightarrow E$ 给出 E 的 $k[T]$ -模结构. 证明 $L \subseteq E$ 是 $k[T]$ -子模, 当且仅当 L 是 k -线性子空间且 $S(L) \subseteq L$. 再证明 $f: E \rightarrow E$ 是 $k[T]$ -模同态, 当且仅当 f 是 k -线性的并满足 $fS = Sf$.
- (6) 幂零算子的模语言. 设 $S: E \rightarrow E$ 满足 $S^r = 0$. 证明相应的 $k[T]$ -模结构可由 $k[T]/(T^r)$ 的作用给出. 对 $E = k^3$ 上的算子 $S(x, y, z) = (y, z, 0)$, 写出由任意向量生成的 $k[T]$ -子模.
- (7) 一点处的取值. 设 $A = C(X, \mathbb{C})$, 固定 $x \in X$, 并按 $f \cdot v = f(x)v$ 把复向量空间 E 视为 A -模. 验证 $\text{ev}_x: C(X, E) \rightarrow E$ 是满的 A -模同态, 并直接构造 $C(X, E)/\ker(\text{ev}_x) \simeq E$.
- (8) 序列空间上的作用. 对 $1 \leq p < \infty$, 证明逐项相乘使 ℓ^p 成为 ℓ^∞ -模, 并证明 $\|a \cdot x\|_p \leq \|a\|_\infty \|x\|_p$. 证明 c_0 是 ℓ^∞ -子模, 并判断 ℓ^1 是否为 ℓ^∞ 的理想; 请根据理想的定义说明理由.
- (9) 第一同构定理的计算. 令 $u: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ 为 $u(a, b) = 2a + 3b$. 求 $\ker u$ 与 $\text{im } u$, 并把同构 $\mathbb{Z}^2/\ker u \simeq \text{im } u$ 写成显式公式.
- (10) 自由模与矩阵. 证明映射 $\text{Hom}_A(A^m, A^n) \rightarrow \text{Mat}_{n \times m}(A)$ 是 A -模同构, 并验证复合映射对应矩阵乘法.
- (11) 生成元与关系. 证明模 M 由 r 个元素生成, 当且仅当 $M \simeq A^r/L$, 其中 $L \subseteq A^r$ 为子模. 对 $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, 证明子模 $2A \subseteq A$ 同构于 $A/(3)$, 但不是自由 A -模.
- (12) 理想 (X, Y) 的关系. 令 $A = k[X, Y]$, 考虑满同态 $\pi: A^2 \rightarrow (X, Y)$, $(f, g) \mapsto fX + gY$. 证明 $\ker \pi = A(-Y, X)$. 由此给出理想 (X, Y) 的生成元与全部关系.
- (13) 直和与直积. 设 I 为无限集合. 证明 $A^{(I)}$ 是 A^I 的子模. 当 $A \neq 0$ 时, 构造一个属于 A^I 但不属于 $A^{(I)}$ 的元素, 说明为何有限指标时两者没有区别.

- (14) 对偶模. 定义 $M^\vee = \text{Hom}_A(M, A)$. 证明 $(A^r)^\vee \simeq A^r$. 若 $A = \mathbb{Z}$ 且 $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 证明 $M^\vee = 0$, 并据此说明一般模的对偶未必能区分非零元素.

参考文献与延伸阅读

- [1] DEDEKIND R. Sur la théorie des nombres entiers algébriques[J/OL]. Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. 2nd ser. 1877, 1(1): 17-41. https://www.numdam.org/item/BSMA_1877_2_1_1_17_1/.
- [2] DIRICHLET P G L. Vorlesungen über Zahlentheorie[M/OL]. ed. by DEDEKIND R. 2nd ed. Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn, 1871. <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN30976923X>.
- [3] GAUSS C F. Disquisitiones Arithmeticae[M/OL]. Leipzig: Gerhard Fleischer, 1801 [2026-08-27]. <https://www.loc.gov/item/36021572/>.
- [4] NOETHER E. Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie[J/OL]. Mathematische Zeitschrift, 1929, 30: 641-692. https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN266833020_0030.