

4.2 第 11 讲 张量积、复化与范畴

本讲中的环均为交换含幺环, 环同态保持幺元; A 表示这样的环, k 表示域.

4.2.1 张量积与双线性映射

二维平面上的多项式函数可以由一元多项式相乘、相加得到. 让两个函数 $f, g \in \mathbb{R}[t]$ 各自依赖独立坐标 x, y , 即得乘积函数 $f(x)g(y) \in \mathbb{R}[x, y]$. 另一方面, 二元单项式 $cx^i y^j$ 都有此形式, 因而任意二元多项式 $h(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ 都是形如乘积 $f(x)g(y)$ 的有限和. 几何上两条实直线的乘积, 对应于单变量多项式函数相乘, 再取线性组合.

张量积把这一构造推广到模: 为分属两个模的元素引入形式乘积, 并把这些乘积的有限和组成一个新模. 乘积须与原有的加法、数乘相容, 这正是下面的双线性条件.

定义 4.18 (双线性映射). 设 M, N, P 为 A -模. 映射 $\beta: M \times N \rightarrow P$ 称为 A -双线性映射 (bilinear map), 如果对所有 $m, m' \in M, n, n' \in N, a \in A$, 都有等式

$$\begin{aligned}\beta(m + m', n) &= \beta(m, n) + \beta(m', n), \quad \beta(am, n) = a\beta(m, n), \\ \beta(m, n + n') &= \beta(m, n) + \beta(m, n'), \quad \beta(m, an) = a\beta(m, n).\end{aligned}$$

换言之, 固定 n 后, $m \mapsto \beta(m, n)$ 是 $M \rightarrow P$ 的 A -线性映射; 固定 m 后, $n \mapsto \beta(m, n)$ 是 $N \rightarrow P$ 的 A -线性映射.

例 4.19 (域的乘法). 域 k 的乘法 $\mu: k \times k \rightarrow k, (x, y) \mapsto xy$ 是 k -双线性的: 固定任一变量时, 这个映射就是乘以一个固定的标量. 但它不是从向量空间 $k \oplus k$ 到 k 的线性映射: $\mu(1, 0) + \mu(0, 1) = 0$, 而 $\mu((1, 0) + (0, 1)) = \mu(1, 1) = 1$. 双线性要求每次固定一个变量; 同时改变两个变量时, 并不要求上述线性等式成立.

例 4.20 (由向量组成矩阵). 设 r, s 为正整数. 对 $v = (v_i) \in k^r, w = (w_j) \in k^s$, 把 (v, w) 送到矩阵 $(v_i w_j)_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s}$, 便得到从 $k^r \times k^s$ 到 $r \times s$ 矩阵组成的 k -向量空间的映射. 固定一个向量时, 矩阵的每个分量都是另一个向量坐标的线性函数, 所以这一映射是 k -双线性的.

例 4.21 (两种多项式乘法). 回到开头的多项式例子. 在实向量空间 $\mathbb{R}[t] \times \mathbb{R}[t]$ 上, $(f, g) \mapsto f(x)g(y)$ 与 $(f, g) \mapsto f(t)g(t)$ 分别定义了取值于 $\mathbb{R}[x, y]$ 与 $\mathbb{R}[t]$ 的实双线性映射. 前者把 $(t, 1), (1, t)$ 分别送到不同的坐标函数 x, y , 后者却把它们都送到 t , 相当于进一步令 $x = y$. 双线性本身并不要求 $x = y$.

张量积只规定双线性所要求的关系, 使每个双线性映射都能由张量积上的线性映射唯一地给出.

定义 4.22. 设 M, N 为 A -模. 一个 A -模 Q 连同同一个 A -双线性映射 $\tau: M \times N \rightarrow Q$, 称为 M, N 在 A 上的张量积(tensor product), 如果满足下述条件: 对每个 A -模 P 及每个 A -双线性映射 $\beta: M \times N \rightarrow P$, 存在唯一的 A -线性映射 $h: Q \rightarrow P$, 使

$$\beta(m, n) = h(\tau(m, n)) \quad (m \in M, n \in N).$$

这一条件称为张量积的泛性质(universal property).

这里 (Q, τ) 对 M, N 固定, 而目标模 P 与映射 β 可以任取; 对每一组 P, β , 上述条件分别确定唯一的 h .

定理 4.23 (张量积的存在与唯一性). 任意两个 A -模 M, N 都有张量积. 若 $(U, \tau_U), (V, \tau_V)$ 都是 M, N 的张量积, 则存在唯一的 A -模同构 $h: U \rightarrow V$, 使 $h(\tau_U(m, n)) = \tau_V(m, n)$ 对所有 $m \in M, n \in N$ 成立.

证明. 对每个 $(m, n) \in M \times N$ 引入一个符号 $[m, n]$. 令 F 为这些符号的形式和 $\sum_{(m,n) \in M \times N} a_{m,n} [m, n]$ 组成的 A -模: 每个系数 $a_{m,n} \in A$, 只有有限个非零; 两个形式和相等是指每个符号的系数都相等, 加法与数乘按系数定义. 模公理由 A 中的环运算得到, 而这些符号按定义构成 F 的基. 令 $R \subseteq F$ 为下列元素生成的 A -子模, 其中 $m, m' \in M, n, n' \in N, a \in A$ 遍历所有取值:

$$\begin{aligned} [m + m', n] - [m, n] - [m', n], & \quad [m, n + n'] - [m, n] - [m, n'], \\ [am, n] - a[m, n], & \quad [m, an] - a[m, n]. \end{aligned}$$

这里“生成的子模”就是包含这些元素的最小子模, 也就是它们的所有有限项 A -线性组合组成的集合. 令 $Q := F/R$, 并定义 $\tau: M \times N \rightarrow Q, \tau(m, n) := [m, n] + R$. 在商模中, R 的上述四类生成元分别等于零, 恰好给出 τ 满足双线性的四个等式. 由于符号 $[m, n]$ 构成 F 的基, 它们的像 $\tau(m, n)$ 生成 Q .

给定 A -双线性映射 $\beta: M \times N \rightarrow P$, 先按 $\sum_{j=1}^r a_j [m_j, n_j] \mapsto \sum_{j=1}^r a_j \beta(m_j, n_j)$ 定义 A -线性映射 $F \rightarrow P$. 由 β 的双线性, R 的每个生成元都映为零, 故此映射诱导 A -线性映射 $h: Q \rightarrow P$, 满足 $h(\tau(m, n)) = \beta(m, n)$. 任何满足此条件的线性映射都在 Q 的生成元 $\tau(m, n)$ 上取相同的值, 故 h 唯一. 由此 (Q, τ) 是张量积.

若 $(U, \tau_U), (V, \tau_V)$ 都满足泛性质, 则分别得到 A -线性映射 $h: U \rightarrow V, g: V \rightarrow U$, 满足 $h \circ \tau_U = \tau_V \circ g, g \circ \tau_V = \tau_U \circ h$. 于是 $(g \circ h) \circ \tau_U = \tau_U$, 由 U 的泛性质中的唯一性可得 $g \circ h = \text{id}_U$; 同理 $h \circ g = \text{id}_V$. 因此 h 是所需的唯一同构. $\square$

固定上述构造的 (Q, τ) , 记 $M \otimes_A N := Q, m \otimes n := \tau(m, n)$. 映射 τ 的值 $m \otimes n$ 称为纯张量(pure tensor). 下标 A 指明系数环; 例如 τ 的双线性给出 $(am) \otimes n = a(m \otimes n) = m \otimes (an)$ 对所有 $a \in A, m \in M, n \in N$ 成立.

每个 $u \in M \otimes_A N$ 都是有限个纯张量之和. 事实上, u 有一个由有限个符号 $[m_j, n_j]$ 组成的代表元, 故可写为 $u = \sum_{j=1}^r a_j(m_j \otimes n_j) = \sum_{j=1}^r (a_j m_j) \otimes n_j$, 其中 r 为正整数, $a_j \in A, m_j \in M, n_j \in N$. 这样的有限和表示不唯一, 例如由双线性有 $(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$.

构造 $M \otimes_A N \rightarrow P$ 的 A -线性映射时, 可以先给出 $M \times N \rightarrow P$ 的映射 β , 再验证它分别对两个变量 A -线性. 泛性质随后保证公式 $m \otimes n \mapsto \beta(m, n)$ 唯一确定所需的线性映射, 不依赖张量的有限和表示.¹

命题 4.24 (自由模的张量积与矩阵). 若 $e_1, \dots, e_r$ 与 $f_1, \dots, f_s$ 分别是 A^r, A^s 的标准基, 则元素 $e_i \otimes f_j (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s)$ 构成 A -模 $A^r \otimes_A A^s$ 的一组基. 张量积 $A^r \otimes_A A^s$ 与以 A 中元素为系数的 $r \times s$ 矩阵所成的 A -模 $\text{Mat}_{r \times s}(A)$ 同构, 同构把 $v \otimes w$ 送到矩阵 $(v_i w_j)_{i,j}$, 其中 $v = (v_i), w = (w_j)$.

证明. 映射 $(v, w) \mapsto (v_i w_j)_{i,j}$ 是 A -双线性的, 故诱导所述 A -线性映射. 反向把矩阵 (a_{ij}) 送到 $\sum_{i,j} a_{ij} e_i \otimes f_j$. 双线性给出 $v \otimes w = \sum_{i,j} v_i w_j e_i \otimes f_j$, 所以两个映射互逆. 第 (i, j) 个位置为 1、其余位置为 0 的标准矩阵对应于 $e_i \otimes f_j$, 故这些纯张量构成张量积的基. $\square$

在实平面上, 上述矩阵表示可以直接联系到长度、角度与面积. 对 $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2)$, 记对应矩阵为 $C = (c_{ij}) = (v_i w_j)$. 线性函数 $C \mapsto c_{11} + c_{22}$ 给出标准内积 $\langle v, w \rangle$, 而 $C \mapsto c_{12} - c_{21}$ 给出以 v, w 为邻边的平行四边形的有向面积. 更一般地, 任意双线性映射 $B: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 都满足 $B(v, w) = \sum_{i,j=1}^2 B(e_i, e_j) c_{ij}$, 因而是 C 的线性函数. 同一个张量 $v \otimes w$ 因此可以用于计算不同的几何量, 构造它时无须预先选定其中某一种运算. 选基只是把这个张量写成矩阵; 张量积本身由泛性质确定, 不依赖基.

例 4.25 (张量不一定是纯张量). 在 $k^2 \otimes_k k^2$ 中, $e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$ 对应二阶单位矩阵, 不可能是纯张量: 对 $v, w \in k^2$, 纯张量 $v \otimes w$ 对应的矩阵的每一列都是 v 的标量倍, 秩至多为一, 而单位矩阵的秩为二. 所以有限个纯张量之和未必仍是纯张量. 由上一命题给出的基还可知, 对有限维 k -向量空间 V, W , 有 $\dim_k(V \otimes_k W) = \dim_k V \cdot \dim_k W$.

纯张量的两个因子非零, 也不保证纯张量非零. 例如在 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 中, $u = \bar{1} \otimes \bar{1}$ 同时满足 $2u = 0, 3u = 0$, 于是 $u = 3u - 2u = 0$. 所有纯张量都是它的整数倍, 因此整个张量积为零.

例 4.26 (有限秩算子). 设 E, F 是 k -向量空间, 记代数对偶为 $E^\vee = \text{Hom}_k(E, k)$. 对 $\lambda \in E^\vee, y \in F$, 公式

$$x \mapsto \lambda(x)y$$

定义一个秩至多为一的线性算子 $E \rightarrow F$. 映射 $(\lambda, y) \mapsto [x \mapsto \lambda(x)y]$ 是双线性的, 因

¹上述构造参见 [1] 第 2 章, 命题 2.12, 第 24–25 页; 也见 [4] 第 10.12 节.

而诱导线性映射

$$\Psi : E^\vee \otimes_k F \longrightarrow \text{Hom}_k(E, F), \quad \Psi(\lambda \otimes y)(x) = \lambda(x)y.$$

这个映射的像恰好是有限秩算子的全体. 事实上, 张量 $\sum_{j=1}^r \lambda_j \otimes y_j$ 给出的算子的像包含于 $\text{span}_k\{y_1, \dots, y_r\}$. 反过来, 若 $T : E \rightarrow F$ 的像由 $y_1, \dots, y_r$ 构成一组基, 把 $T(x)$ 按这组基展开为 $T(x) = \sum_{j=1}^r \lambda_j(x)y_j$, 则每个 $\lambda_j \in E^\vee$, 且 $T = \Psi(\sum_{j=1}^r \lambda_j \otimes y_j)$. 再把 y_j 取成线性无关, 就可看出 Ψ 的核为零.

若 $k = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 且 E, F 是赋范空间, 把 $E^\vee$ 换成连续对偶 E' , 则同一公式把 $E' \otimes_k F$ 识别为从 E 到 F 的有限秩有界算子空间. 因此, 泛函分析中的秩一算子就是纯张量, 有限秩算子则是有限个纯张量之和.

〔史略〕 张量积的起源: 几何量与抽象乘积

张量的一个重要来源, 是用不同坐标描述同一个几何量. 例如, 选基后内积写成 $\sum_{i,j} g_{ij} v_i w_j$, 其中 g_{ij} 是第 i, j 个基向量的内积, v_i, w_j 是向量的坐标. 换基会改变这些系数与坐标, 而内积的值不变. 1900 年, Gregorio Ricci 与 Tullio Levi-Civita 在《绝对微分学的方法及其应用》中系统研究了这类坐标变换规律. 其中的乘法把两组分量两两相乘; 乘积的分量按两个因子各自的变换规律一起变化. 用现代语言看, $(v_i w_j)$ 正是 $v \otimes w$ 的坐标表达 [3] 第 I 章第 2-3 节.

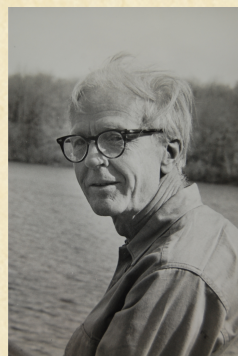
1938 年, Hassler Whitney 在《阿贝尔群的张量积》中提出一个抽象的乘法问题: 给定阿贝尔群 G, H , 希望在一个新群中容纳符号乘积 $g \cdot h$, 使乘法对两个变量分别满足分配律. 他用这些乘积的有限和构造新群, 并把分配律规定的表达式视为相等 [5] p. 495 及定理 1. 这与本讲取 $A = \mathbb{Z}$ 时的构造相对应: 乘积先作为新元素存在, 每个分别可加的具体运算再给出从这个群出发的同态. 从阿贝尔群推广到 A -模时, 还须规定数乘与这个乘法相容; 例如 $(am) \otimes n = m \otimes (an)$ 表示把 a 乘在任一因子上, 所得张量相同.



Gregorio Ricci-Curbastro
意大利数学家, 创立绝对微分学.



Tullio Levi-Civita
意大利数学家, 与 Ricci 共同奠定
张量分析基础.



Hassler Whitney
美国数学家, 1938 年构造阿贝尔
群的张量积.²

Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.

Par

M. M. G. RICCI et T. LEVI-CIVITA à Padoue.

Ricci 与 Levi-Civita

《绝对微分学的方法及其应用》

1900 年, 原刊第 125 页题名

TENSOR PRODUCTS OF ABELIAN GROUPS

By HASSLER WHITNEY

Whitney《阿贝尔群的张量积》

1938 年, 原刊第 495 页题名

4.2.2 计算规则: 直和、商模与关系

命题 4.27 (张量积的基本运算). 设 M, M', N, N', P 为 A -模. 任意 A -线性映射 $f: M \rightarrow M', g: N \rightarrow N'$ 诱导 A -线性映射 $f \otimes g: M \otimes_A N \rightarrow M' \otimes_A N'$, 规定 $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$. 此外, 下列公式给出同构:

$$\begin{aligned} A \otimes_A M &\simeq M, & a \otimes m &\mapsto am, \\ M \otimes_A N &\simeq N \otimes_A M, & m \otimes n &\mapsto n \otimes m, \\ (M \oplus N) \otimes_A P &\simeq (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P), & (m, n) \otimes p &\mapsto (m \otimes p, n \otimes p). \end{aligned}$$

结合律同构 $(M \otimes_A N) \otimes_A P \simeq M \otimes_A (N \otimes_A P)$ 把 $(m \otimes n) \otimes p$ 送到 $m \otimes (n \otimes p)$.

证明. 映射 $f \otimes g$ 由双线性映射 $(m, n) \mapsto f(m) \otimes g(n)$ 诱导. 三个所列同构也来自双线性映射; 它们的逆分别由 $m \mapsto 1 \otimes m$ 、交换两个因子, 以及 $(m \otimes p, 0) \mapsto (m, 0) \otimes p$ 、 $(0, n \otimes p) \mapsto (0, n) \otimes p$ 给出. 在生成元上检查复合映射, 即得互逆.

对结合律, 先固定 $p \in P$, 利用 $(m, n) \mapsto m \otimes (n \otimes p)$ 的双线性得到 A -线性映射 $F_p: M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A (N \otimes_A P)$. 映射 $(u, p) \mapsto F_p(u)$ 对 $u \in M \otimes_A N, p \in P$ 是 A -双线性的, 再用一次泛性质就得到所需映射. 反向按相同方法构造; 两个复合分别固定生成元 $(m \otimes n) \otimes p$ 和 $m \otimes (n \otimes p)$, 故均为恒等映射. $\square$

这些同构由所写出的元素公式确定, 不依赖基的选取. 例如 $A^r \otimes_A N \simeq N^r$ 把 $(a_1, \dots, a_r) \otimes n$ 送到 $(a_1 n, \dots, a_r n)$. 若 $m_1, \dots, m_r$ 生成 $M, n_1, \dots, n_s$ 生成 N , 则展开纯张量可知, 元素族 $(m_i \otimes n_j)_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s}$ 生成 $M \otimes_A N$, 但未必在 A 上线性无关.

命题 4.28 (商模与张量积). 设 M, N 为 A -模, $L \subseteq M$ 是子模, $R \subseteq M \otimes_A N$ 是所有 $l \otimes n$ ($l \in L, n \in N$) 生成的子模. 则

$$(M/L) \otimes_A N \simeq (M \otimes_A N)/R, \quad (m + L) \otimes n \mapsto (m \otimes n) + R.$$

²肖像来源 (均经 Wikimedia Commons): Ricci-Curbastro (约 1900 年), Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, CC BY 4.0; Levi-Civita (1941 年以前), 都灵科学院历史档案; Whitney (1973 年 4 月), Sally Thurston 摄, CC BY 3.0. 书影分别取自 Zenodo 所存《Mathematische Annalen》第 54 卷扫描件与 Categories 邮件列表所存《Duke Mathematical Journal》第 4 卷扫描件的首页题名部分.

证明. 若 $l \in L$, 则 $(m+l) \otimes n - m \otimes n = l \otimes n \in R$, 故右侧的商类不依赖 $m+L$ 的代表元, 并给出关于 $m+L, n$ 的双线性映射. 反向由 $m \otimes n \mapsto (m+L) \otimes n$ 得到: 这个线性映射在 R 上为零, 故诱导商模上的映射. 两个复合分别固定生成元 $(m+L) \otimes n$ 和 $(m \otimes n) + R$, 因此两映射互逆. $\square$

推论 4.29 (商环与模的张量积). 设 M 为 A -模. 对理想 $I \subseteq A$, 记 IM 为所有 am ($a \in I, m \in M$) 的有限和组成的子模. 则

$$(A/I) \otimes_A M \simeq M/IM, \quad (a+I) \otimes m \mapsto am + IM.$$

特别地, 对任意理想 $J \subseteq A$, 有 $(A/I) \otimes_A (A/J) \simeq A/(I+J)$.

证明. 对商模 A/I 和模 M 应用上一命题. 在同构 $A \otimes_A M \simeq M$ 下, 由所有 $a \otimes m$ ($a \in I, m \in M$) 生成的子模对应于 IM . 对最后一式, $I(A/J) = (I+J)/J$, 再取商即得结论. $\square$

例 4.30 (有限循环群). 对正整数 m, n , 令 $d = \gcd(m, n)$. 推论给出

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

对任意 $a, b \in \mathbb{Z}, \bar{a} \otimes \bar{b}$ 对应 $ab \bmod d$, 其中左、右两个因子中的上横线分别表示模 m 、模 n 的剩余类. 这个公式给出了每个纯张量在上述同构下的像. 例如 $m=6, n=4$ 时结果为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; 当 m, n 互素时, 上述张量积是零模.

例 4.31 (单射可能变成零映射). 单射 $u: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, a \mapsto 2a$ 与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上的恒等映射 id 作张量积, 得到

$$u \otimes \text{id}: \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

源与靶均同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 而非零生成元 $1 \otimes \bar{1}$ 的像为 $2 \otimes \bar{1} = 1 \otimes \bar{2} = 0$. 这里用到了数乘恒等式 $2 \otimes \bar{1} = 1 \otimes 2\bar{1}$. 因此 $u \otimes \text{id}$ 是零映射, 特别地, 它不是单射.

与此相对, 若 A -线性映射 $f: M \rightarrow M', g: N \rightarrow N'$ 都是满射, 则 $f \otimes g$ 也是满射: 目标中的每个纯张量 $m' \otimes n'$ 都有原像 $m \otimes n$, 其中 $f(m) = m', g(n) = n'$, 而纯张量生成目标模. 命题 4.28 还给出了商模与张量积交换次序的具体公式.

4.2.3 标量扩张与复化

设 $\varphi: A \rightarrow B$ 是环同态. 任意 B -模 N 都可以看成 A -模, 只需对 $a \in A, n \in N$ 规定 $an = \varphi(a)n$. 反过来, 如何由一个 A -模 M 构造以 B 为系数环的模? 在 $B \otimes_A M$ 中, 纯张量 $b \otimes m$ 将表示 b 乘以 m 的像 $1 \otimes m$.

命题 4.32 (标量扩张). 对任意 A -模 M , 公式 $b'(b \otimes m) = b'b \otimes m$ 在 $M_B = B \otimes_A M$ 上定义一个 B -模结构, 其中 $b, b' \in B, m \in M$. 这个 B -模称为 M 沿 φ 的标量扩张 (extension of scalars). 若 N 为 B -模, $v: M \rightarrow N$ 为 A -线性映射, 则存在唯一的 B -线性映射 $\tilde{v}: B \otimes_A M \rightarrow N$, 使 $\tilde{v}(1 \otimes m) = v(m)$ 对所有 $m \in M$ 成立. 它由公式 $\tilde{v}(b \otimes m) = bv(m)$ 给出.

证明. 对固定的 $b' \in B$, $(b, m) \mapsto b'b \otimes m$ 是 A -双线性的, 故定义了 $B \otimes_A M$ 上的 A -线性算子; 在纯张量上验证数乘公理即可. 映射 $(b, m) \mapsto bv(m)$ 也是 A -双线性的, 因为 $v(am) = \varphi(a)v(m)$. 所得映射满足 $\tilde{v}(b'b \otimes m) = b'\tilde{v}(b \otimes m)$, 故为 B -线性. 最后, $b \otimes m = b(1 \otimes m)$, 而纯张量生成 $B \otimes_A M$, 所以这样的 B -线性映射唯一. $\square$

自然映射 $M \rightarrow M_B, m \mapsto 1 \otimes m$ 不一定单射. 例如 φ 为商映射 $A \rightarrow A/I$ 时, 标量扩张同构于 M/IM : 理想 I 中的每个元素都在这个商模上作用为零. 此时 $m \mapsto 1 \otimes m$ 对应商映射 $M \rightarrow M/IM$, 其核为 IM .

例 4.33 (实向量空间的复化). 设 E 是实向量空间. 它的复化是 $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} E$. 映射 $(a + ib) \otimes v \mapsto (av, bv)$ 给出实线性同构 $E_{\mathbb{C}} \simeq E \oplus E$, 逆为 $(v, w) \mapsto 1 \otimes v + i \otimes w$. 将元素 $1 \otimes v + i \otimes w$ 简记为 $v + iw$, 则乘以 i 的作用为 $i(v + iw) = -w + iv$.

实线性算子 $S: E \rightarrow E$ 延伸为复线性算子 $S_{\mathbb{C}}(v + iw) = S(v) + iS(w)$. 例如实平面上的算子 $S(x, y) = (-y, x)$ 满足 $S^2 = -\text{id}_{\mathbb{R}^2}$, 没有实特征值; 其复化 $S_{\mathbb{C}}$ 则有特征值 $i, -i$. 复化后的坐标公式仍为 $(x, y) \mapsto (-y, x)$, 但坐标现在可以取复数.

同样, 对任意测度空间 X 和 $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(X; \mathbb{R})$ 的复化可以自然识别为 $L^p(X; \mathbb{C})$: $(a + ib) \otimes f$ 被送到 $af + ibf$. 每个复值 L^p 函数都唯一写成 $u + iv$, 其中 $u, v \in L^p(X; \mathbb{R})$, 这说明上述映射是复向量空间同构. 实 L^p 空间上的有界实线性算子也因而按 $S_{\mathbb{C}}(u + iv) = S(u) + iS(v)$ 延伸到复 L^p 空间.

例 4.34 (函数空间与完备化的必要性). 令 $C([0, 1])$ 表示实值连续函数组成的 Banach 空间. 双线性映射

$$C([0, 1]) \times C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1]^2), \quad (f, g) \mapsto [(x, y) \mapsto f(x)g(y)]$$

诱导一个单射

$$C([0, 1]) \otimes_{\mathbb{R}} C([0, 1]) \hookrightarrow C([0, 1]^2).$$

为了看出单射性, 可把一个张量写成 $\sum_{j=1}^r f_j \otimes g_j$, 其中 $g_1, \dots, g_r$ 线性无关. 若它所对应的函数为零, 则对每个 $x \in [0, 1]$ 都有 $\sum_{j=1}^r f_j(x)g_j = 0$; 线性无关性给出 $f_j(x) = 0$, 故原张量为零. 它的像由所有有限和 $\sum_{j=1}^r f_j(x)g_j(y)$ 组成; 这类函数把两个变量分离成有限多项.

这个像在一致范数下不完备. 例如

$$h_N(x, y) = \sum_{n=0}^N \frac{x^n y^n}{n!}$$

属于上述像, 并且在 $[0, 1]^2$ 上一致收敛到 $h(x, y) = e^{xy}$. 但 h 不能写成有限和 $\sum_{j=1}^r f_j(x)g_j(y)$. 否则函数族 $y \mapsto e^{xy}$ ($0 \leq x \leq 1$) 将包含在 $g_1, \dots, g_r$ 张成的有限维空间中; 而任取不同的 $x_0, \dots, x_r$, 函数 $e^{x_0 y}, \dots, e^{x_r y}$ 线性无关. 最后一点可由假设 $\sum_{j=0}^r c_j e^{x_j y} = 0$, 再在 $y = 0$ 处依次取 $0, 1, \dots, r$ 阶导数所得的 Vandermonde 方程组看出.

因此, 代数张量积只记录有限和; 当泛函分析需要容纳范数极限时, 还要在张量积上选取合适的范数并取完备化. 这就是后续完备张量积的出发点.

4.2.4 范畴及其基本例子

复化既把实向量空间 E 变成 $E_{\mathbb{C}}$, 也把实线性映射 $S: E \rightarrow F$ 变成复线性映射 $S_{\mathbb{C}}: E_{\mathbb{C}} \rightarrow F_{\mathbb{C}}$, 其公式仍是 $S_{\mathbb{C}}(v + iw) = S(v) + iS(w)$. 若 $T: F \rightarrow G$ 也是实线性映射, 则直接代入可得 $(T \circ S)_{\mathbb{C}} = T_{\mathbb{C}} \circ S_{\mathbb{C}}$; 恒等映射复化后仍是恒等映射. 因此, 复化同时作用于空间和线性映射, 并保持映射的复合. 范畴正是把对象、对象之间的态射以及复合规律作为整体来研究.

定义 4.35. 一个范畴(category) $\mathcal{C}$ 包含下列资料:

- (1) 一类对象, 记为 $X, Y, \dots$;
- (2) 对任意两个对象 X, Y , 一个态射集 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 其中的元素写作 $f: X \rightarrow Y$;
- (3) 对 $f: X \rightarrow Y$ 与 $g: Y \rightarrow Z$, 一个复合态射 $g \circ f: X \rightarrow Z$;
- (4) 对每个对象 X , 一个恒等态射 $\text{id}_X: X \rightarrow X$.

它们满足结合律 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, 以及 $f \circ \text{id}_X = f = \text{id}_Y \circ f$. 若 $f: X \rightarrow Y$ 存在态射 $g: Y \rightarrow X$, 使 $g \circ f = \text{id}_X$ 且 $f \circ g = \text{id}_Y$, 则称 f 为同构(isomorphism), g 为 f 的逆, 并称 X, Y 同构.

态射不一定是集合之间的映射. 例如, 把偏序关系看成态射时, 态射只记录两个元素能否比较. 因此, 理解一个范畴必须同时说明它的对象与态射.

例 4.36 (若干基本范畴). 下列例子将反复出现.

- (1) 集合为对象、集合映射为态射, 得到集合范畴 **Set**. 其中的同构正是双射.

- (2) 拓扑空间为对象、连续映射为态射, 得到拓扑空间范畴 **Top**. 其中的同构正是同胚.
- (3) 群为对象、群同态为态射, 得到群范畴 **Grp**; 阿贝尔群及其同态组成范畴 **Ab**.
- (4) 交换含么环为对象、保持么元的环同态为态射, 得到 **CRing**. 本讲所说的环范畴均指这一范畴.
- (5) 固定交换含么环 A . A -模为对象、 A -线性映射为态射, 得到 **A -Mod**.
- (6) 偏序集 $(P, \leq)$ 也给出一个范畴: 当且仅当 $x \leq y$ 时, 从 x 到 y 有唯一态射. 复合来自传递性, 恒等态射来自 $x \leq x$. 若偏序是反对称的, 则两个对象同构当且仅当它们相等.

这些范畴的复合均由原有映射的复合给出; 偏序集范畴中的复合则由唯一性自动确定.

〔史略〕 范畴论的起源: 何谓“自然”的同构

在代数拓扑的研究中, Samuel Eilenberg 与 Saunders Mac Lane 需要比较同构与群同态之间的相容性. 两人在 1942 年发表《群论中的自然同构》, 1945 年又在《自然等价的一般理论》中将这一问题推广到不同的数学结构, 系统引入范畴的语言. 该文开篇用向量空间的对偶解释“同构”与“自然同构”的区别[2]pp. 231–236.

设 V 为有限维实向量空间, 记 $V^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$. 选定 V 的基, 把它送到对偶基, 便得到 $V \simeq V^\vee$, 但这个同构依赖基的选择. 相比之下, 双对偶 $V^{\vee\vee} = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V^\vee, \mathbb{R})$ 有一个不依赖基的取值映射 $\iota_V : V \rightarrow V^{\vee\vee}$, 由 $\iota_V(v)(\lambda) = \lambda(v)$ 给出. 对每个非零 $v \in V$, 取一组含 v 的基就能找到 $\lambda \in V^\vee$ 使 $\lambda(v) \neq 0$, 故 ι_V 单射; 两端维数相同, 所以它是同构.

更重要的是, 这个公式与所有线性映射相容. 再设 W 为有限维实向量空间, $S : V \rightarrow W$ 为线性映射. 对 $\Phi \in V^{\vee\vee}, \lambda \in W^\vee$, 规定 $S^{\vee\vee}(\Phi)(\lambda) = \Phi(\lambda \circ S)$, 便得到线性映射 $S^{\vee\vee} : V^{\vee\vee} \rightarrow W^{\vee\vee}$. 于是对每个 $v \in V$ 及 $\lambda \in W^\vee$, 有

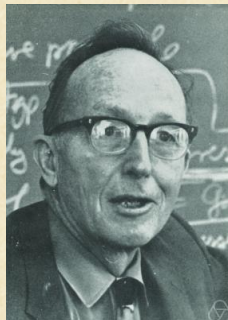
$$(S^{\vee\vee}(\iota_V(v)))(\lambda) = \lambda(Sv) = \iota_W(Sv)(\lambda).$$

先作 S 再进入双对偶, 与先进入双对偶再作 $S^{\vee\vee}$, 得到同一结果. 这种与线性映射的相容性, 正是此处“自然”的含义; 要表达它, 就须把空间与空间之间的映射一起考察.



Samuel Eilenberg

代数拓扑学家, 范畴论的共同创立者.



Saunders Mac Lane

美国数学家, 范畴论的共同创立者.³

GENERAL THEORY OF NATURAL EQUIVALENCES

BY

SAMUEL EILENBERG AND SAUNDERS MACLANE

Eilenberg 与 Mac Lane《自然等价的一般理论》

1945 年, 原刊第 231 页题名

4.2.5 始对象与终对象

定义 4.37. 设 $\mathcal{C}$ 为范畴. 若对每个对象 $X \in \mathcal{C}$, 都存在唯一态射 $I \rightarrow X$, 则称 I 为 $\mathcal{C}$ 的始对象 (*initial object*). 若对每个 $X \in \mathcal{C}$, 都存在唯一态射 $X \rightarrow T$, 则称 T 为 $\mathcal{C}$ 的终对象 (*terminal object*). 既是始对象又是终对象的对象称为零对象 (*zero object*).

始对象与终对象要求的是态射的存在性和唯一性, 而不是对象本身字面相等.

命题 4.38 (始对象与终对象的唯一性). 一个范畴中的两个始对象之间存在唯一同构, 两个终对象之间也存在唯一同构.

证明. 设 I, I' 都是始对象. 由定义, 存在唯一态射 $u : I \rightarrow I'$ 与唯一态射 $v : I' \rightarrow I$. 态射 $v \circ u$ 与 id_I 都从 I 到 I , 故始对象的唯一性给出 $v \circ u = \text{id}_I$. 同理 $u \circ v = \text{id}_{I'}$. 因此 u 是同构, 而且从 I 到 I' 本来就只有一个态射, 故此同构唯一. 终对象的证明把所有箭头反向即可. $\square$

例 4.39 (基本范畴中的始对象与终对象). 在 **Set** 中, 空集是始对象, 任意单点集是终对象. 在 **Top** 中, 空空间是始对象, 单点空间是终对象. 在 **Grp** 与 **Ab** 中, 平凡群既是始对象又是终对象. 在 **A-Mod** 中, 零模是零对象.

在 **CRing** 中, $\mathbb{Z}$ 是始对象: 对每个交换含么环 R , 唯一的含么环同态 $\mathbb{Z} \rightarrow R$ 由 $n \mapsto n1_R$ 给出. 若把零环列为对象, 则零环是终对象, 因为每个环到零环只有一个含么

³肖像均由 Konrad Jacobs 摄影, 藏于 Oberwolfach 数学研究所照片档案, 经 Wikimedia Commons 获取: Eilenberg(1970 年); Mac Lane(约 1972 年), 采用 CC BY-SA 2.0 DE 许可. 书影取自俄亥俄州立大学网页所存 JSTOR 扫描件, 为《Transactions of the American Mathematical Society》第 58 卷第 231 页题名.

环同态. 若约定环必须满足 $1 \neq 0$, 零环被排除, 此时这句终对象的结论也随之不再适用.

4.2.6 么半群与单对象范畴

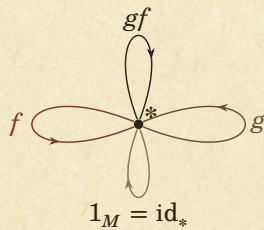
命题 4.40 (对象的自同态么半群). 设 X 是范畴 $\mathcal{C}$ 的对象. 全部自态射

$$\text{End}_{\mathcal{C}}(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$$

以态射复合为乘法、以 id_X 为么元, 构成么半群. 其中可逆元素恰好是 X 的自同构.

证明. 态射复合的结合律就是么半群乘法的结合律, 恒等态射的公理说明 id_X 是么元. 一个自态射在这个么半群中可逆, 当且仅当它作为态射存在双侧逆, 这正是自同构的定义. $\square$

反过来, 设 M 是么半群. 取一个对象 $*$, 令 $\text{Hom}(*, *) = M$, 并对 $f, g \in M$ 规定 $g \circ f = gf$, 把恒等态射定义为 M 的么元. 么半群公理恰好保证这些资料构成范畴, 记为 $\mathcal{C}_M$.



一个点 $*$ 表示唯一对象, 每个 $f \in M$ 都表示从 $*$ 回到自身的箭头.

先沿 f , 再沿 g 复合, 所得箭头为 $g \circ f = gf$; 么元 1_M 对应恒等箭头 id_* .

么半群 M 所确定的单对象范畴 $\mathcal{C}_M$; 图中画出部分自态射.

定理 4.41 (么半群与单对象范畴). 么半群与单对象范畴给出同一种结构:

$$M \mapsto \mathcal{C}_M, \quad \mathcal{C} \mapsto \text{End}_{\mathcal{C}}(*).$$

么半群同态 $\varphi: M \rightarrow N$ 恰好对应于保持恒等态射与复合的映射 $\mathcal{C}_M \rightarrow \mathcal{C}_N$. 因此, 么半群范畴与单对象范畴所成的范畴等价.

证明. 从 M 构造 $\mathcal{C}_M$ 后再取唯一对象的自态射, 所得么半群就是 M . 从单对象范畴 $\mathcal{C}$ 取 $M = \text{End}_{\mathcal{C}}(*)$, 再构造 $\mathcal{C}_M$, 其对象、态射、恒等态射与复合都与 $\mathcal{C}$ 相同.

映射 $\varphi: M \rightarrow N$ 保持么元与乘法, 当且仅当对应的态射映射保持恒等态射与复合. 这也说明上述两个构造在同态层面互逆. 若把每个单对象范畴的唯一对象统一记为 $*$, 两边甚至严格互逆; 不固定对象的名称时, 得到通常意义下的等价. $\square$

群是所有元素都可逆的么半群. 因而, 群对应于单对象范畴中每个态射都可逆的情形; 这样的范畴称为单对象群胚. 这个观察把群乘法解释为态射复合, 也说明非交换么半群对应的单对象范畴一般不能交换态射的复合次序.

习题

- (1) 纯张量与矩阵秩. 设 V, W 是有限维 k -向量空间, 并分别选定一组基. 证明非零纯张量恰好对应秩一矩阵; 一个张量能写成的最少纯张量项数, 等于对应矩阵的秩. 约定零张量的最少项数为 0.
- (2) 非零纯张量的判别. 设 V, W 为 k -向量空间, 取非零向量 $v \in V, w \in W$. 构造线性泛函 $\lambda: V \rightarrow k, \mu: W \rightarrow k$, 使 $\lambda(v) = \mu(w) = 1$, 再用张量积的泛性质证明 $v \otimes w \neq 0$. 指出证明在哪一步使用了系数环是域.
- (3) 有限阿贝尔群的张量积. 计算

$$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z},$$

并证明对每个正整数 n , 都有 $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$.

- (4) 单射在张量后可以消失. 证明 $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 且其中 $2 \otimes \bar{1} \neq 0$. 说明包含映射 $2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作张量后为何成为零映射.
- (5) 复化与共轭. 对实向量空间 E , 证明 $J(z \otimes v) = \bar{z} \otimes v$ 给出 $E_{\mathbb{C}}$ 上良定义的共轭线性对合, 并证明其不动点集合恰为 $\{1 \otimes v : v \in E\}$.
- (6) 有限秩有界算子. 设 E, F 是赋范 k -向量空间, E' 是 E 的连续对偶. 证明正文中的映射 $E' \otimes_k F \rightarrow \text{Hom}_k(E, F)$ 是单射, 其像恰好是有限秩有界算子. 再证明 $T_{\lambda, y}(x) = \lambda(x)y$ 满足 $\|T_{\lambda, y}\| = \|\lambda\| \|y\|$.
- (7) 函数张量与完备化. 核查例 4.34 中的单射, 并证明 $h_N(x, y) = \sum_{n=0}^N x^n y^n / n!$ 在一致范数下是 Cauchy 列. 证明其极限 e^{xy} 不在代数张量积的像中.
- (8) 逐项核查范畴公理. 分别对 **Set**、**Top**、**Grp** 与 **A-Mod** 写出态射复合和恒等态射, 并核查结合律及单位律. 说明这些范畴中的同构分别是什么.
- (9) 始对象与终对象. 逐一证明例 4.39 中关于 **Set**、**Top**、**Grp** 与 **A-Mod** 的断言. 为什么空集在 **Set** 中不是终对象?
- (10) 偏序集作为范畴. 设 $(P, \leq)$ 是偏序集. 证明它作为范畴的始对象恰好是 P 的最小元, 终对象恰好是 P 的最大元. 以正整数的整除偏序为例, 讨论始对象与终对象是否存在.

- (11) 自同态幺半群. 设 V 为 k -向量空间. 描述 $\text{End}_k(V)$ 的幺半群结构, 并证明其可逆元素恰为 $\text{GL}(V)$. 当 $V = k^n$ 时, 把这一结论写成矩阵语言.
- (12) 从幺半群恢复单对象范畴. 分别对 $(\mathbb{N}_0, +)$ 、一个群 G 以及二阶矩阵乘法幺半群构造相应的单对象范畴. 说明哪些例子给出群胚, 并证明幺半群同态恰好给出保持恒等态射与复合的态射映射.

参考文献与延伸阅读

- [1] ATIYAH M F, MACDONALD I G. Introduction to Commutative Algebra[M]. Addison-Wesley, 1969.
- [2] EILENBERG S, MACLANE S. General theory of natural equivalences [J/OL]. Transactions of the American Mathematical Society, 1945, 58(2): 231-294. DOI: [10.1090/S0002-9947-1945-0013131-6](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1945-0013131-6).
- [3] RICCI G, LEVI-CIVITA T. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications[J/OL]. Mathematische Annalen, 1900, 54: 125-201. DOI: [10.1007/BF01454201](https://doi.org/10.1007/BF01454201).
- [4] The Stacks Project Authors. Commutative Algebra, Section 10.12: Tensor Products[EB/OL]. [2026-08-11]. <https://stacks.math.columbia.edu/tag/00CV>.
- [5] WHITNEY H. Tensor products of Abelian groups[J/OL]. Duke Mathematical Journal, 1938, 4(3): 495-528. DOI: [10.1215/S0012-7094-38-00442-9](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-38-00442-9).