

4.3 第 12 讲 函子、极限与余极限

第十一讲介绍了范畴、始对象与终对象. 本讲先研究范畴之间的函子, 再用自然变换比较函子, 最后把积、余积等构造统一为极限与余极限. 函子是集合之间映射的推广, 它既要指定对象的像, 也要指定态射的像, 并使这些指定与恒等态射及复合相容.

4.3.1 函子与自然变换

定义 4.42. 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴. 一个函子(*functor*, 亦称协变函子)

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

把每个对象 X 送到对象 $F(X)$, 把每个态射 $f : X \rightarrow Y$ 送到态射 $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$, 并对每个对象 X 及每对可复合的态射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 满足

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}, \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

$\mathcal{C}$ 的反范畴, 记作 $\mathcal{C}^{\text{op}}$, 它作为范畴与 $\mathcal{C}$ 有相同的对象, 但把 $\mathcal{C}$ 中的每个态射的方向反转. 从 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 到 $\mathcal{D}$ 的函子也称为从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的反变函子. 具体地, 它将 $f : X \rightarrow Y$ 送到 $F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$, 保持恒等态射, 并对 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 满足 $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

把每个对象与态射都送到自身的函子称为恒等函子, 记作 $\text{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. 函子的复合分别在对象与态射上取复合: 例如 $(G \circ F)(f) = G(F(f))$.

例 4.43. 固定环 A , 把 A -模 M 送到集合 M , 把 A -模同态送到同一个集合映射, 得到

$$\text{遗忘函子 } U : A\text{-Mod} \rightarrow \text{Set}.$$

类似可考虑群范畴 **Grp**, 环范畴 **Ring** 到集合范畴 **Set** 的遗忘函子. 而且遗忘不局限于以集合作为终点. 例如, **Ring** 中的对象可以先遗忘掉环的乘法结构, 成为阿贝尔群范畴 **Ab** 中的对象, 再遗忘掉作为阿贝尔群的身份, 仅作为群, 成为 **Grp** 中的对象, 甚至再遗忘群的身份成为幺半群范畴 **Monoid** 中的对象, 等等. 所以“遗忘函子”这个词指代一大类遗忘掉特定结构的函子, 且可以逐次复合, 从结构丰富的范畴到结构更少的范畴.

例 4.44. 固定环 A 以及 A -模 N . 通过把 A -模和 N 作张量积, 我们得到

$$\text{张量积函子 } - \otimes_A N : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$$

它把 A -模 M 送到 $M \otimes_A N$, 把 A -模同态 $f: M \rightarrow M'$ 送到

$$f \otimes \text{id}_N: M \otimes_A N \rightarrow M' \otimes_A N, \quad m \otimes n \mapsto f(m) \otimes n.$$

若还有 A -线性映射 $g: M' \rightarrow M''$, 则 $(g \circ f) \otimes \text{id}_N = (g \otimes \text{id}_N) \circ (f \otimes \text{id}_N)$. 因为两边都把 $m \otimes n$ 送到 $g(f(m)) \otimes n$, 而纯张量生成整个张量积. 同样, $\text{id}_M \otimes \text{id}_N = \text{id}_{M \otimes_A N}$. 这就验证了函子的两条公理.

例 4.45 (Hom 函子). 回顾第十讲: 环 A 的两模 M, N 同态集 $\text{Hom}_A(M, N)$ 是 A -模.

- (1) 固定 A -模 N . 考虑 $\text{Hom}_A(N, -): A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$, 它把 A -模 P 送到 A -模 $\text{Hom}_A(N, P)$, 把 A -模同态 $u: P \rightarrow Q$ 送到如下 A -模同态, 其由后复合 u 给出

$$\text{Hom}_A(N, u): \text{Hom}_A(N, P) \rightarrow \text{Hom}_A(N, Q), \quad h \mapsto u \circ h.$$

还需验证它保持恒等态射和态射复合. 保持恒等态射是因为 $\text{id}_P \circ h = h$. 对任意 A -模同态 $Q \xrightarrow{v} Q'$, 有 $(v \circ u) \circ h = v \circ (u \circ h)$. 因此 $\text{Hom}_A(N, -)$ 是协变函子.

- (2) 固定 A -模 P . 考虑 $\text{Hom}_A(-, P): (A\text{-Mod})^{\text{op}} \rightarrow A\text{-Mod}$, 它把 A -模 M 送到 A -模 $\text{Hom}_A(M, P)$, 由前复合 f 把 A -模同态 $f: M' \rightarrow M$ 送到如下 A -模同态

$$\text{Hom}_A(f, P): \text{Hom}_A(M, P) \rightarrow \text{Hom}_A(M', P), \quad h \mapsto h \circ f.$$

还需验证 $\text{Hom}_A(-, P)$ 保持恒等态射和态射的复合. 恒等态射的保持性来自 $h \circ \text{id}_M = h$. 对任意 A -模同态 $g: M'' \rightarrow M'$, 我们有等式 $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$. 因此 $\text{Hom}_A(-, P)$ 是反变函子.

例 4.46 (连续映射原像函子). 拓扑空间 X 的开集按包含关系组成一个范畴¹, 记为 $\text{Op}(X)$: 对象是 X 的开集; 当 $U \subseteq V$ 时有唯一态射 $U \rightarrow V$, 否则没有态射. 恒等态射来自 $U \subseteq U$, 态射的复合性来自开集包含关系的传递性.

设 $f: X \rightarrow Y$ 为拓扑空间的连续映射. 开集的原像仍是开集, 故可规定

$$f^{-1}: \text{Op}(Y) \rightarrow \text{Op}(X), \quad U \mapsto f^{-1}(U).$$

它把态射 $U \rightarrow V$ 送到态射 $f^{-1}(U) \rightarrow f^{-1}(V)$. 恒等的函子像仍是恒等; 对 $U \subseteq V \subseteq W$, 先后取两个包含态射的函子像 $f^{-1}(U) \rightarrow f^{-1}(V)$ 以及 $f^{-1}(V) \rightarrow f^{-1}(W)$ 再复合得到 $f^{-1}(U) \rightarrow f^{-1}(W)$ (即 $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(W)$ 这个包含关系), 与直接对 $U \rightarrow W$ 取函子像相同. 因此 f^{-1} 是 X 和 Y 的开子集范畴之间的协变函子.

这表明 **Top** 中的任意态射 $f: X \rightarrow Y$ 给出函子 $f^{-1}: \text{Op}(Y) \rightarrow \text{Op}(X)$. 若还有连续映射 $g: Y \rightarrow Z$, 则 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, 而 $(\text{id}_X)^{-1}$ 是 $\text{Op}(X)$ 的恒等函子.

¹实际上它是偏序集, 因为任意集合的子集全体都构成集合, 拓扑空间的开集全体也构成集合.

例 4.47. 记 $\mathbf{CRing}$ 为交换含幺环及含幺环同态组成的范畴, $\mathbf{Top}$ 为拓扑空间及连续映射组成的范畴. 回忆: 素谱 $\mathrm{Spec} A$ 带有 Zariski 拓扑, 且对于环同态 $\varphi: A \rightarrow B$, 映射

$$\mathrm{Spec}(\varphi): \mathrm{Spec} B \rightarrow \mathrm{Spec} A, \quad \mathfrak{q} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q}).$$

是连续映射. 若考虑环同态 $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$, 则 $\mathrm{Spec}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Spec}(\varphi) \circ \mathrm{Spec}(\psi)$, 且 $\mathrm{Spec}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathrm{Spec} A}$. 这给出反变函子, 亦即函子 $\mathrm{Spec}: \mathbf{CRing}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Top}$.

例 4.48 (Berkovich 谱的反变函子). 固定完备赋值域 $(K, |\cdot|)$, 沿用第六讲的 Banach 代数与谱. 令 $K\text{-}\mathbf{BanAlg}$ 的对象为非零交换含幺 Banach K -代数 (范数满足 $\|1\| = 1$), 态射为有界的含幺 K -代数同态.

第六讲定义了 A 的 Berkovich 谱, 即拓扑空间 $\mathcal{M}(A)$. 态射 $\varphi: A \rightarrow B$ 诱导

$$\mathcal{M}(\varphi): \mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A), \quad x \mapsto x \circ \varphi.$$

为拓扑空间的连续映射. 对有界 K -代数同态 $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$, 有

$$\mathcal{M}(\psi \circ \varphi) = \mathcal{M}(\varphi) \circ \mathcal{M}(\psi), \quad \mathcal{M}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathcal{M}(A)}.$$

第一式两边作用于 $x \in \mathcal{M}(C)$, 在 $f \in A$ 上均取值 $|\psi(\varphi(f))|_x$; 第二式由恒等同态的定义得到. 因此 Berkovich 谱 $\mathcal{M}: K\text{-}\mathbf{BanAlg} \rightarrow \mathbf{Top}$ 为反变函子.

此外, Berkovich 谱与素谱的构造相容. 回忆支撑的定义, 我们有

$$\mathrm{supp}(\mathcal{M}(\varphi)(x)) = \{f \in A : |\varphi(f)|_x = 0\} = \varphi^{-1}(\mathrm{supp}(x)).$$

所以, 先沿 φ 拉回半范数再取支撑, 与先取支撑再沿 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 映射, 得到同一个素理想. 并且我们回忆支撑映射 $\mathrm{supp}: \mathcal{M}(A) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ 还是拓扑空间的连续映射, 即, 支撑 supp 实际上把 $\mathcal{M}$ 的函子像送到 Spec 的函子像. 下图表示函子间的比较关系.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M} & \\ & \Downarrow \mathrm{supp} & \\ (K\text{-}\mathbf{BanAlg})^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\quad \mathrm{Spec} \quad} & \mathbf{Top} \end{array}$$

一般地, 如何比较两个函子? 我们知道如何比较两个集合之间的函数 $f, g: X \rightarrow Y$, 即对于每个 $x \in X$ 比较函数值 $f(x)$ 和 $g(x)$. 对两个函子 $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 也是类似, 但正确的方式是对每个对象 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 给出所谓“比较态射” $F(X) \rightarrow G(X)$, 且使对象上的比较态射与 $\mathcal{C}$ 中的态射 $X \rightarrow Y$ 相容. 这种比较两个函子的方式就是自然变换.

定义 4.49. 设 $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子. 一个自然变换(*natural transformation*)

$$\eta: F \Rightarrow G$$

- 给每个对象 $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ 对应一个 $\mathcal{D}$ 中态射 $\eta_X: F(X) \rightarrow G(X)$;
- 对任意 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f: X \rightarrow Y$, 都有

$$G(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ F(f). \quad (4.1)$$

等式 (4.1) 称为 η 关于态射 f 的自然性等式. 两边都是从 $F(X)$ 到 $G(Y)$ 的态射: 左边先经过 $G(X)$, 右边先经过 $F(Y)$. 因此, 自然性等式恰好表示下图交换:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y). \end{array}$$

若每个 η_X 都是同构, 则称 η 为自然同构(*natural isomorphism*).

我们立刻回到例 4.48. 支撑映射 $\text{supp}_A: \mathcal{M}(A) \rightarrow \text{Spec} A$ 组成自然变换

$$\text{supp}: \mathcal{M} \Rightarrow \text{Spec}.$$

两个函子均从 $(K\text{-}\mathbf{BanAlg})^{\text{op}}$ 出发, 函子像位于 $\mathbf{Top}$.

例 4.50 (标量扩张的自然映射). 设 $\varphi: A \rightarrow B$ 为交换含幺环同态. 对每个 A -模 M , 把 $B \otimes_A M$ 看成 A -模, 规定 $a \cdot (b \otimes m) = \varphi(a)b \otimes m$. 把 A -模 M 送到 $B \otimes_A M$, 把 A -线性映射 $f: M \rightarrow N$ 送到 $\text{id}_B \otimes f$, 得到函子

$$B \otimes_A -: A\text{-}\mathbf{Mod} \rightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}.$$

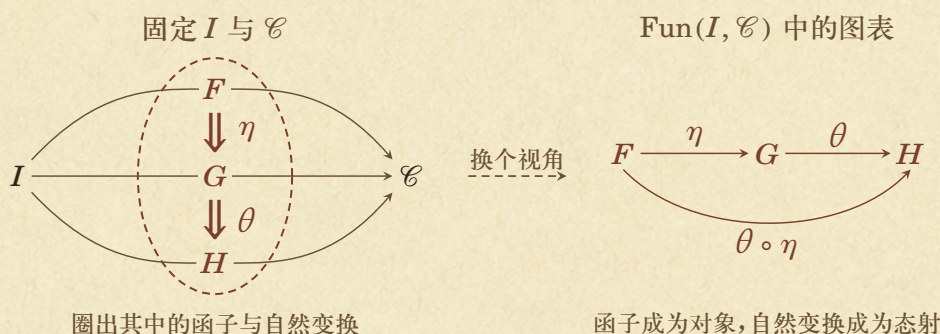
恒等与复合的保持性由纯张量上的计算得到, 与例 4.44 相同.

对每个 A -模 M , 定义 $\eta_M: M \rightarrow B \otimes_A M, m \mapsto 1 \otimes m$. 等式 $1 \otimes am = \varphi(a) \otimes m$ 说明 η_M 是 A -线性的. 对任意 A -线性映射 $f: M \rightarrow N$, 有 $(\text{id}_B \otimes f) \circ \eta_M = \eta_N \circ f$, 因为两边都把 m 送到 $1 \otimes f(m)$. 因此 η 是从恒等函子到 $B \otimes_A -$ 的自然变换.

固定源范畴和目标范畴后, 函子作为对象、自然变换作为态射, 也组成一个范畴.

定义 4.51 (函子范畴). 称范畴 I 为小范畴 (*small category*), 若其对象与态射都组成集合. 在此设定下, 考虑范畴 $\mathcal{C}$, 定义函子范畴 (*functor category*) $\text{Fun}(I, \mathcal{C})$ 如下:

- (1) 对象是函子 $F : I \rightarrow \mathcal{C}$.
- (2) 从 F 到 G 的态射是自然变换 $\eta : F \Rightarrow G$.
- (3) F 的恒等态射 $\text{id}_F : F \Rightarrow F$ 给 I 的每个对象 i 指定恒等态射 $\text{id}_{F(i)} : F(i) \rightarrow F(i)$.
- (4) 自然变换 $\eta : F \Rightarrow G$ 和 $\theta : G \Rightarrow H$ 的复合 $\theta \circ \eta : F \Rightarrow H$ 给 I 的每个对象 i 指定 $\mathcal{C}$ 中的态射 $\theta_i \circ \eta_i : F(i) \rightarrow H(i)$.



固定 I 与 $\mathcal{C}$ 后, 虚线圈内的函子 F, G, H 是 $\text{Fun}(I, \mathcal{C})$ 的对象, 自然变换 η, θ 是它的态射. 右图画出了这三个对象、两个自然变换及其复合, 略去恒等态射.

现验证 $\text{Fun}(I, \mathcal{C})$ 满足范畴公理. 按自然变换的定义, 两个自然变换 $\eta, \eta' : F \Rightarrow G$ 相等, 当且仅当 $\eta_i = \eta'_i$ 对 I 的每个对象 i 成立.

- (1) 恒等确实给出自然变换. 对 I 中任意态射 $\alpha : i \rightarrow j$, 范畴 $\mathcal{C}$ 的恒等态射给出

$$F(\alpha) \circ \text{id}_{F(i)} = F(\alpha) = \text{id}_{F(j)} \circ F(\alpha).$$

因此 id_F 满足自然性等式 (4.1). 故给每个 i 指定 $\text{id}_{F(i)}$ 得自然变换 $\text{id}_F : F \Rightarrow F$.

- (2) 自然变换的复合性质. 设 $\eta : F \Rightarrow G, \theta : G \Rightarrow H$ 为自然变换. 对 I 中的态射 $\alpha : i \rightarrow j$, 将自然性等式 (4.1) 分别用于 η, θ , 得到下图的上、下两个方块交换:

$$\begin{array}{ccc} F(i) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(j) \\ \eta_i \downarrow & & \downarrow \eta_j \\ G(i) & \xrightarrow{G(\alpha)} & G(j) \\ \theta_i \downarrow & & \downarrow \theta_j \\ H(i) & \xrightarrow{H(\alpha)} & H(j) \end{array}$$

因而外框也交换,即

$$H(\alpha) \circ (\theta_i \circ \eta_i) = (\theta_j \circ \eta_j) \circ F(\alpha).$$

故上述复合定义了自然变换 $\theta \circ \eta : F \Rightarrow H$.

(3) 结合律. 再设 $L : I \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子, $\kappa : H \Rightarrow L$ 为自然变换. 按复合的定义, $(\kappa \circ \theta) \circ \eta$ 与 $\kappa \circ (\theta \circ \eta)$ 给每个对象 i 指定的态射分别是 $(\kappa_i \circ \theta_i) \circ \eta_i$ 与 $\kappa_i \circ (\theta_i \circ \eta_i)$. 它们由 $\mathcal{C}$ 的结合律相等, 因而这两个从 F 到 L 的自然变换相等.

(4) 单位律. 对自然变换 $\eta : F \Rightarrow G$, $\text{id}_G \circ \eta$ 与 $\eta \circ \text{id}_F$ 给每个对象 i 指定的态射分别是 $\text{id}_{G(i)} \circ \eta_i$ 与 $\eta_i \circ \text{id}_{F(i)}$. 由 $\mathcal{C}$ 的单位律, 两者都等于 η_i , 所以 $\text{id}_G \circ \eta = \eta = \eta \circ \text{id}_F$.

最后, 范畴 I 的对象组成集合, 且 $\mathcal{C}$ 中每个态射集都是集合, 故下列乘积是集合:

$$\prod_{j \in \text{Obj}(I)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(j), G(j)).$$

从 F 到 G 的自然变换恰是上述乘积中满足自然性等式 (4.1) 的态射族 $(\eta_j)_{j \in \text{Obj}(I)}$: 对 I 中每个态射 $\alpha : i \rightarrow j$, 都要求 $G(\alpha) \circ \eta_i = \eta_j \circ F(\alpha)$. 因此, $\text{Hom}_{\text{Fun}(I, \mathcal{C})}(F, G)$ 是该乘积的子集, 故也是集合. $\square$

自然同构恰是函子范畴中的同构态射: 若各 η_i 可逆, 把自然性等式左右复合相应逆映射, 就得到 $(\eta_i^{-1})_i$ 的自然性.

4.3.2 极限与余极限

回想数学分析中的闭区间套定理: 一列非空闭区间 $J_n = [a_n, b_n]$ 若满足 $J_{n+1} \subseteq J_n$, 且长度 $b_n - a_n \rightarrow 0$, 就有唯一的公共点 x , 并且 $a_n \rightarrow x, b_n \rightarrow x$. 随着 n 增大, 区间越缩越窄, 两端点一步步逼近极限值 x ; 这个极限值, 恰好也是所有区间的公共点.

把区间包含关系写成映射 $\iota_n : J_{n+1} \hookrightarrow J_n$, 这列区间就在集合范畴中连成图表:

$$\cdots \rightarrow J_{n+1} \xrightarrow{\iota_n} J_n \rightarrow \cdots \rightarrow J_1.$$

交集 $\bigcap_{n \geq 1} J_n = \{x\}$ 嵌入每个 J_n , 相应的包含映射 $p_n : \{x\} \hookrightarrow J_n$ 满足 $\iota_n \circ p_{n+1} = p_n$.

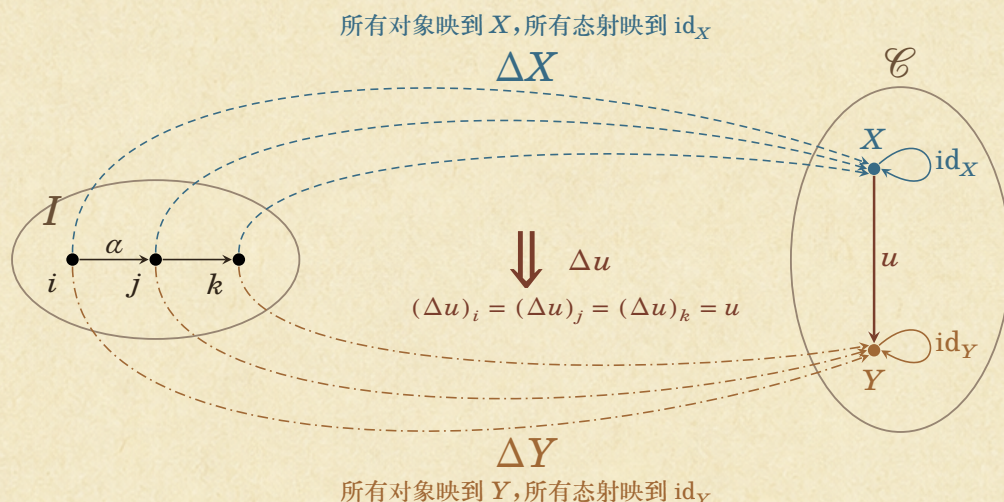
另取任何集合及其到各层的相容映射族, 都唯一地经过 $\{x\}$ 分解: 任意集合 T 若有映射 $f_n : T \rightarrow J_n$ 满足 $\iota_n \circ f_{n+1} = f_n$, 包含映射 ι_n 就保证每个 $t \in T$ 在各层的像相同, 因而落在 $\{x\}$ 中. 这便给出唯一的 $f : T \rightarrow \{x\}$, 使分解 $p_n \circ f = f_n$ 对每个 n 成立.

该性质在范畴论称为泛性质(或万有性质). 上述关于 J_n 的图表可看作函子

$$D: \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{Set},$$

其中自然数集 $\mathbb{N}$ 配以大小关系决定的态射构成范畴(若 $m > n$ 则有唯一态射 $m \rightarrow n$), 使得 $D(i) = J_i$. 一般地, 范畴 $\mathcal{C}$ 中的图表均由函子 $D: I \rightarrow \mathcal{C}$ 给出. 若某对象 L 带有相容态射 $L \rightarrow D(i)$, 使从任意对象 X 出发的相容态射族都唯一地经由 L 分解, 就称 L 连同这些态射为 D 的极限. 把箭头反向, 考察从图表到共同目标的相容态射族及其唯一分解, 便得到余极限. 实际上, 通过以下构造, 这些相容态射族也可看成自然变换.

设 I 为小范畴, 固定范畴 $\mathcal{C}$ 的对象 X . 把 I 的所有对象送到 X 、所有态射送到 id_X , 得到常值函子 $\Delta X: I \rightarrow \mathcal{C}$. 它保持恒等态射; 由 $\text{id}_X \circ \text{id}_X = \text{id}_X$, 也保持复合. 对 $\mathcal{C}$ 中的态射 $u: X \rightarrow Y$, 给 I 的每个对象 i 指定同一态射 u , 得到自然变换 $\Delta u: \Delta X \Rightarrow \Delta Y$. 事实上, 对 I 中任意态射 $\alpha: i \rightarrow j$, 自然性等式 (4.1) 在此就是 $\text{id}_Y \circ u = u \circ \text{id}_X$.



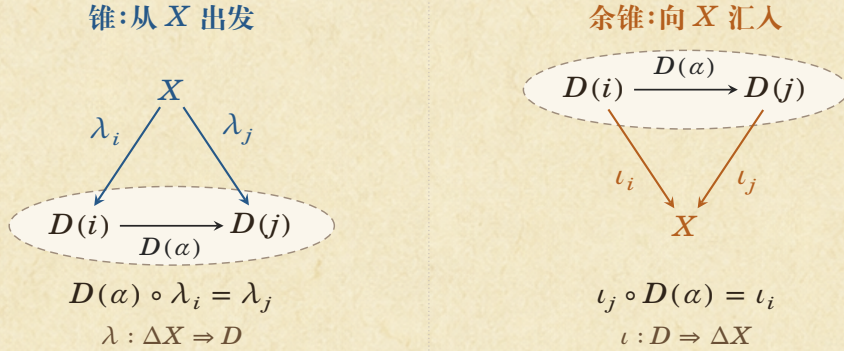
上图的圈内仅画出部分对象与态射, 虚线箭头表示常值函子.

也就是说, 每个 $\mathcal{C}$ 中的对象给出常值函子 ΔX , 且 $\mathcal{C}$ 中的态射诱导出常值函子的自然变换 $\Delta X \Rightarrow \Delta Y$. 这些“更升一级”的指定定义了对角函子(diagonal functor)

$$\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Fun}(I, \mathcal{C}), \quad X \mapsto \Delta X, \quad u \mapsto \Delta u.$$

对每个 $i \in \text{Obj}(I)$, $\Delta(\text{id}_X)$ 与 $\text{id}_{\Delta X}$ 指定的态射都是 id_X . 若 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$, 则 $\Delta(v \circ u)$ 与 $\Delta v \circ \Delta u$ 在每个 i 处指定的态射都是 $v \circ u$. 这就验证了恒等态射与复合均被保持.

固定图表 $D : I \rightarrow \mathcal{C}$. 从 $\mathcal{C}$ 中同一个对象 X 向每个 $D(i)$ 引出态射, 或让各个 $D(i)$ 的态射汇入 X , 就得到下面两种形状: 锥和余锥.



图中仅展示图表一部分(白色圈), 以及一条 $\alpha : i \rightarrow j$ 所对应的三角形. 若对 I 的每条箭头, 两条路径都给出同一个态射, 左边的态射族就称为以 X 为顶点的锥, 右边的称为余锥. 这些交换条件即是自然性条件, 所以它们分别写成图下的两个自然变换 λ 和 ι .

比较两个锥或余锥时, 顶点间的态射 $u : X \rightarrow Y$ 还须与各条结构态射相容. 以锥或余锥为对象、这样的比较映射为态射, 就得到下面的两个范畴.

定义 4.52 (极限与余极限). 设 I 为小范畴、 $\mathcal{C}$ 为范畴, $D : I \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子, 称 I 为它的指标范畴. 用对角函子 Δ 定义以下两个逗号范畴(*comma category*):

- (1) $(\Delta \downarrow D)$ 的对象是二元组 (X, λ) , 其中 $X \in \mathcal{C}$, $\lambda : \Delta X \Rightarrow D$ 是自然变换. 从 (X, λ) 到 (Y, μ) 的态射是满足 $\mu \circ \Delta u = \lambda$ 的 $\mathcal{C}$ 中态射 $u : X \rightarrow Y$.
- (2) $(D \downarrow \Delta)$ 的对象是二元组 (X, ι) , 其中 $X \in \mathcal{C}$, $\iota : D \Rightarrow \Delta X$ 是自然变换. 从 (X, ι) 到 (Y, κ) 的态射是满足 $\Delta u \circ \iota = \kappa$ 的 $\mathcal{C}$ 中态射 $u : X \rightarrow Y$.

两者的恒等态射与复合都取自 $\mathcal{C}$. $(\Delta \downarrow D)$ 的终对象 (L, λ) 称为 D 的极限(*limit*); $(D \downarrow \Delta)$ 的始对象 (C, ι) 称为 D 的余极限(*colimit*).

验证上述指定确实给出范畴. 在 $(\Delta \downarrow D)$ 中, $\lambda \circ \Delta(\text{id}_X) = \lambda$, 故恒等态射满足所需条件. 若 $u : (X, \lambda) \rightarrow (Y, \mu)$, $v : (Y, \mu) \rightarrow (Z, \nu)$ 为态射, 则

$$\nu \circ \Delta(v \circ u) = \nu \circ \Delta v \circ \Delta u = \mu \circ \Delta u = \lambda.$$

所以 $v \circ u$ 仍是所规定的态射. 在 $(D \downarrow \Delta)$ 中, 恒等态射同样满足条件; 若

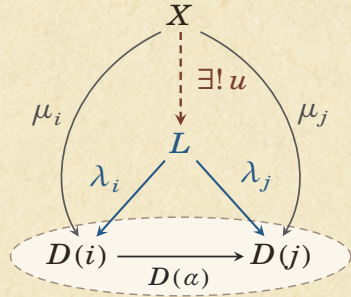
$$u : (X, \iota) \rightarrow (Y, \kappa) \quad \text{和} \quad v : (Y, \kappa) \rightarrow (Z, \rho)$$

为态射, 即 $\Delta u \circ \iota = \kappa$, $\Delta v \circ \kappa = \rho$, 则 $\Delta(v \circ u) \circ \iota = \Delta v \circ \kappa = \rho$. 两个范畴的态射集都是 $\mathcal{C}$ 中相应态射集的子集, 结合律和左右单位律则直接沿用 $\mathcal{C}$ 中的等式. $\square$

把终对象与始对象的定义展开, 就得到极限与余极限的泛性质:

- (1) 极限. 设 $L \in \mathcal{C}$, $\lambda : \Delta L \Rightarrow D$ 为自然变换, 则它给 I 的每个对象 i 指定态射 $\lambda_i : L \rightarrow D(i)$, 并对 I 中每条 $\alpha : i \rightarrow j$ 满足 $D(\alpha) \circ \lambda_i = \lambda_j$ (自然性等式 (4.1)). 此时 (L, λ) 为极限, 当且仅当: 对任意 $X \in \mathcal{C}$ 及一族态射 $\mu_i : X \rightarrow D(i)$, 若对每条 $\alpha : i \rightarrow j$ 都有 $D(\alpha) \circ \mu_i = \mu_j$, 则存在唯一态射 $u : X \rightarrow L$, 使

$$\lambda_i \circ u = \mu_i \quad \text{对所有 } i \in \text{Obj}(I) \text{ 成立.}$$



给定一整族相容的 μ_i

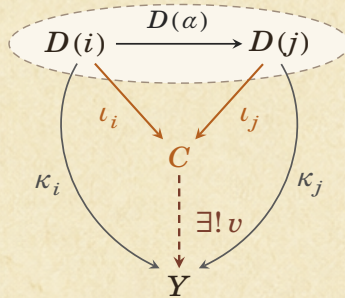
同一个 u 同时满足

$$\lambda_i \circ u = \mu_i \quad (\forall i \in \text{Obj}(I))$$

图中画出任意一条 $\alpha : i \rightarrow j$. 任意 μ_i 都可通过 L 分解, 即先经由 u , 再经相应的 λ_i . 因而 (X, μ) 作为 $(\Delta \downarrow D)$ 的对象, 从它到终对象 (L, λ) 的唯一态射即是 u .

- (2) 余极限. 设 $C \in \mathcal{C}$, $\iota : D \Rightarrow \Delta C$ 为自然变换. 它给 I 的每个对象 i 指定态射 $\iota_i : D(i) \rightarrow C$, 并对每条 $\alpha : i \rightarrow j$ 满足 $\iota_j \circ D(\alpha) = \iota_i$. 此时 (C, ι) 为余极限, 当且仅当: 对任意 $Y \in \mathcal{C}$ 及一族态射 $\kappa_i : D(i) \rightarrow Y$, 若对每条 $\alpha : i \rightarrow j$ 都有 $\kappa_j \circ D(\alpha) = \kappa_i$, 则存在唯一态射 $v : C \rightarrow Y$, 使

$$v \circ \iota_i = \kappa_i \quad \text{对所有 } i \in \text{Obj}(I) \text{ 成立.}$$



给定一整族相容的 κ_i

同一个 v 同时满足

$$v \circ \iota_i = \kappa_i \quad (\forall i \in \text{Obj}(I))$$

图中仍只画出图表的一部分. 外侧的态射都可通过 C 分解: 先经相应的 ι_i , 再经同一个 v . 此即始对象 (C, ι) 到任意对象 (Y, κ) 的唯一态射条件.

相应的态射 $\lambda_i : L \rightarrow D(i)$ 与 $\iota_i : D(i) \rightarrow C$ 分别称为极限与余极限的结构态射. 因此, 极限与余极限除了一个对象, 还包含这些指定的态射.

极限与余极限的对象常简记为 $\lim D$ 与 $\text{colim } D$.

命题 4.53 (极限与余极限的唯一性). 设 I 为小范畴, $\mathcal{C}$ 为范畴, $D: I \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子.

- (1) 若 $(L, \lambda), (L', \lambda')$ 都是 D 的极限, 则存在唯一同构 $u: L \rightarrow L'$, 满足 $\lambda'_i \circ u = \lambda_i$ 对所有 $i \in \text{Obj}(I)$ 成立.
- (2) 若 $(C, \iota), (C', \iota')$ 都是 D 的余极限, 则存在唯一同构 $v: C \rightarrow C'$, 满足 $v \circ \iota_i = \iota'_i$ 对所有 $i \in \text{Obj}(I)$ 成立.

证明. 两个极限都是 $(\Delta \downarrow D)$ 的终对象. 由命题 4.38, 它们在这个逗号范畴中唯一同构; 按逗号范畴中态射的定义, 这就是满足 $\lambda'_i \circ u = \lambda_i$ 的唯一同构. 由于复合与恒等态射都取自 $\mathcal{C}$, 逗号范畴中互逆的两个态射在 $\mathcal{C}$ 中也互逆. 余极限的断言同理由始对象的唯一性得到. $\square$

积与余积

只有恒等态射的范畴称为离散范畴. 记 I_2 为对象只有 0, 1 的离散范畴, 其图示为

$$I_2 \quad \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ 0 & 1 \end{array}$$

以下指标范畴图中, 黑点表示对象, 箭头表示非恒等态射, 各对象的恒等态射均省略. 给出函子 $D: I_2 \rightarrow \mathcal{C}$, 就是指定两个对象 $D(0), D(1)$, 因为恒等态射的像已由函子公理确定. 这类函子的极限称为两个对象的积, 余极限称为两个对象的余积. 对任意 $T \in \mathcal{C}$, 给出自然变换 $\Delta T \Rightarrow D$, 就是给出两个态射 $T \rightarrow D(0), T \rightarrow D(1)$; 给出自然变换 $D \Rightarrow \Delta T$, 就是给出两个态射 $D(0) \rightarrow T, D(1) \rightarrow T$. 恒等态射对应的自然性等式由单位律成立, 没有其他条件需要验证.

例 4.54 (集合笛卡尔积). 设 X, Y 为集合, 令 $D: I_2 \rightarrow \mathbf{Set}$ 满足 $D(0) = X, D(1) = Y$.

- (1) 构造. 考虑笛卡尔积

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\},$$

以及两个投影 $p_X: X \times Y \rightarrow X, p_Y: X \times Y \rightarrow Y$, 其中 $p_X(x, y) = x, p_Y(x, y) = y$.

- (2) 泛性质. 设 T 为集合, $a: T \rightarrow X, b: T \rightarrow Y$ 为映射. 它们组成自然变换 $\Delta T \Rightarrow D$. 定义

$$u: T \rightarrow X \times Y, \quad t \mapsto (a(t), b(t)).$$

则 $p_X \circ u = a$ 且 $p_Y \circ u = b$. 若 $u': T \rightarrow X \times Y$ 也满足这两个等式, 则 $u'(t)$ 的两个坐标分别为 $a(t), b(t)$, 故 $u' = u$. 因此 $X \times Y$ 连同两个投影是 D 的极限.

例 4.55 (集合不交并). 设 X, Y 为集合, 令 $D: I_2 \rightarrow \mathbf{Set}$ 满足 $D(0) = X, D(1) = Y$.

(1) 构造. 考虑带标签的不交并

$$X \sqcup Y = (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\}),$$

以及映射 $i_X : X \rightarrow X \sqcup Y, i_Y : Y \rightarrow X \sqcup Y$, 其中 $i_X(x) = (x, 0), i_Y(y) = (y, 1)$.

(2) 泛性质. 设 T 为集合, $a : X \rightarrow T, b : Y \rightarrow T$ 为映射. 它们组成自然变换 $D \Rightarrow \Delta T$. 定义

$$v : X \sqcup Y \rightarrow T, \quad v(x, 0) = a(x), \quad v(y, 1) = b(y).$$

两个带标签的部分互不相交, 所以此定义良好, 并满足 $v \circ i_X = a, v \circ i_Y = b$. 不交并的每个元素都属于这两个部分之一, 因而这两个等式唯一确定 v . 因此 $X \sqcup Y$ 连同 i_X, i_Y 是 D 的余极限.

(3) 与普通并集的区别. 取 $X = Y = \{*\}$, 则 $X \times Y$ 是单点集, 而 $X \sqcup Y = \{(*, 0), (*, 1)\}$ 有两个元素. 普通并集 $X \cup Y = \{*\}$ 不能替代此处不交并: 取 $T = \{0, 1\}, a(*) = 0, b(*) = 1$, 便没有映射 $X \cup Y \rightarrow T$ 能同时延伸 a, b , 因为这会要求同一个元素 $*$ 同时映到 0 和 1.

例 4.56 (群的积: 直积). 设 G, H 为群. 在集合 $G \times H$ 上逐坐标定义乘法

$$(g, h)(g', h') = (gg', hh'),$$

得到直积群 $G \times H$. 它连同两个投影 $p_G(g, h) = g, p_H(g, h) = h$, 就是 G, H 在 **Grp** 中的积: 对任意群 K 及群同态 $a : K \rightarrow G, b : K \rightarrow H$, 存在唯一群同态

$$u : K \rightarrow G \times H, \quad k \mapsto (a(k), b(k)),$$

满足 $p_G \circ u = a, p_H \circ u = b$.

例 4.57 (群的余积: 自由积). 群 G, H 在 **Grp** 中的余积称为自由积, 记为 $G * H$. 它带有两个单射群同态 $i_G : G \rightarrow G * H, i_H : H \rightarrow G * H$, 满足: 对任意群 K 及群同态 $a : G \rightarrow K, b : H \rightarrow K$, 存在唯一群同态 $v : G * H \rightarrow K$, 使

$$v \circ i_G = a, \quad v \circ i_H = b.$$

自由积把两个群放进同一个群中, 保留各自的乘法关系; 两个因子的元素可以按任意顺序相乘, 彼此之间不另加关系. 具体地, 每个元素都有唯一的约化词表示 $s_1 \cdots s_n$: 每个字母是某个因子的非幺元, 相邻字母来自不同因子; 空词 ε 表示幺元. 来自两个因子的字母须加以区分, 即使 $G = H$ 也如此. 乘法是先拼接两个词, 再合并同一因子的相邻字母、删去幺元, 直到得到约化词.

例如, 设 $G = \{1, a\}, H = \{1, b\}$ 都是二阶循环群. 直积 $C_2 \times C_2$ 是四元交换群; 自由积 $C_2 * C_2$ 的元素则是 $\varepsilon, a, b, ab, ba, aba, bab, \dots$ 这样的交替词. 其中 $ab \neq ba$, 且 $(ab)^n (n \geq 1)$ 互不相同, 所以它是无限非交换群. 直积与自由积的详细构造及泛性质证明, 整理在习题 (8) 中.

等化子与余等化子

记 $I_{\parallel}$ 为只有两个对象 $0, 1$ 、各自的恒等态射, 以及两条不同的非恒等态射 $\alpha, \beta : 0 \rightarrow 1$ 的范畴. 固定范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个态射 $f, g : X \rightarrow Y$. 它们定义函子 $D : I_{\parallel} \rightarrow \mathcal{C}$, 把对象 $0, 1$ 分别送到 X, Y , 把态射 α, β 分别送到 f, g . 指标范畴及函子像为

$$I_{\parallel} : 0 \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 1 \bullet \xrightarrow{D} \begin{array}{ccc} X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} & Y \end{array}$$

这个图表的极限称为 f, g 的等化子: 用一个态射 $e : E \rightarrow X$ 使 $fe = ge$, 并要求任何满足 $fa = ga$ 的态射 $a : T \rightarrow X$ 唯一地通过 e 分解. 另一个结构态射由 $fe = ge$ 确定. 其余极限称为余等化子: 用 $q : Y \rightarrow Q$ 使 $qf = qg$, 并要求任何满足 $bf = bg$ 的 $b : Y \rightarrow T$ 唯一地通过 q 分解. 下面在集合中计算这两种构造; 交换环与模的计算分别留到第十三、十四讲.

例 4.58 (集合中的等化子). 本例取 $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$, 即 X, Y 为集合, f, g 为集合映射.

- (1) 构造. 设 T 为集合, 自然变换 $\mu : \Delta T \Rightarrow D$ 给对象 $0, 1$ 指定的映射分别为 $a : T \rightarrow X, b : T \rightarrow Y$. 将自然性等式 (4.1) 分别用于 $\alpha, \beta : 0 \rightarrow 1$, 得到

$$f \circ a = b \circ \text{id}_T = b, \quad g \circ a = b \circ \text{id}_T = b.$$

因此 b 由 a 确定, 而 a 的值必须落在 f, g 取值相等的那些点上. 令

$$E = \text{Eq}(f, g) = \{x \in X : f(x) = g(x)\}, \quad e : E \hookrightarrow X.$$

取态射 $\lambda_0 = e : E \rightarrow X, \lambda_1 = f \circ e = g \circ e : E \rightarrow Y$. 它们满足 $f \circ \lambda_0 = \lambda_1 = g \circ \lambda_0$, 因而组成自然变换 $\lambda : \Delta E \Rightarrow D$.

- (2) 泛性质. 对任意上述 (T, μ) , 由 $f \circ a = g \circ a$ 可知 $a(t) \in E$ 对每个 $t \in T$ 成立. 于是映射

$$u : T \longrightarrow E, \quad u(t) = a(t)$$

定义良好, 并满足 $\lambda_0 \circ u = a, \lambda_1 \circ u = f \circ a = b$. 若 $u' : T \rightarrow E$ 也满足这两个等式, 则由 $e \circ u' = a = e \circ u$ 及 e 的单射性, 得到 $u' = u$. 因此 (E, λ) 是 D 的极限,

包含映射 e 称为 f, g 的等化子(equalizer).

(3) 具体计算. 取 $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{a, b\}$, 并规定

x	0	1	2
$f(x)$	a	a	b
$g(x)$	a	b	b

由 $f(0) = g(0) = a, f(2) = g(2) = b$, 而 $f(1) = a \neq b = g(1)$, 得到 $E = \{0, 2\}$. 结构态射 λ_0 是包含映射 $\{0, 2\} \hookrightarrow X$, λ_1 则把 0 送到 a 、把 2 送到 b . 对任意集合 S 及映射 $h: S \rightarrow X$, 条件 $f \circ h = g \circ h$ 恰好要求 $h(s) \neq 1$ 对所有 $s \in S$ 成立. 此时, 把同一取值公式 $s \mapsto h(s)$ 的目标集合改为 $\{0, 2\}$, 就得到唯一的映射 $S \rightarrow E$, 与 e 复合后等于 h .

若 $f = g$, 则 $E = X$, 等化子为 id_X ; 若两映射在每一点的值都不同, 则 $E = \emptyset$, 等化子为空集到 X 的包含映射.

例 4.59 (集合中的余等化子). (1) 构造. 设 T 为集合, 自然变换 $\kappa: D \Rightarrow \Delta T$ 给对象 0, 1 指定的映射分别为 $a: X \rightarrow T, b: Y \rightarrow T$. 将自然性等式 (4.1) 分别用于 $\alpha, \beta: 0 \rightarrow 1$, 得到

$$b \circ f = \text{id}_T \circ a = a, \quad b \circ g = \text{id}_T \circ a = a.$$

因此 a 由 b 确定, 而 $b: Y \rightarrow T$ 必须把每一对 $f(x), g(x)$ 送到同一个元素. 据此, 在 Y 上取满足 $f(x) \sim g(x)$ 对所有 $x \in X$ 成立的最小等价关系 $\sim$. 这样的等价关系至少有一个, 即把 Y 的所有元素视为等价的关系. 将所有满足这些条件的等价关系取交, 仍满足自反性、对称性与传递性, 故得到所需的最小等价关系. 令

$$Q = \text{Coeq}(f, g) = Y / \sim, \quad q: Y \rightarrow Q, \quad y \mapsto [y].$$

取态射 $\iota_1 = q: Y \rightarrow Q, \iota_0 = q \circ f = q \circ g: X \rightarrow Q$. 它们满足 $\iota_1 \circ f = \iota_0 = \iota_1 \circ g$, 因而组成自然变换 $\iota: D \Rightarrow \Delta Q$.

(2) 泛性质. 对任意上述 (T, κ) , 有 $b \circ f = a = b \circ g$. 关系 $y \equiv_b y' \iff b(y) = b(y')$ 是 Y 上的等价关系, 且包含每一对 $(f(x), g(x))$. 由 $\sim$ 的最小性, $y \sim y'$ 蕴含 $b(y) = b(y')$. 于是映射

$$v: Q \rightarrow T, \quad v([y]) = b(y)$$

定义良好, 并满足 $v \circ \iota_1 = b, v \circ \iota_0 = b \circ f = a$. 若 $v': Q \rightarrow T$ 也满足这两个等式, 则由 $v' \circ q = b = v \circ q$ 及 q 的满射性, 得到 $v' = v$. 因此 (Q, ι) 是 D 的余极限, 商映射 q 称为 f, g 的余等化子(coequalizer).

(3) 具体计算. 取 $X = \{u, v\}, Y = \{a, b, c, d\}$, 并规定

$$f(u) = a, \quad g(u) = b, \quad f(v) = b, \quad g(v) = c.$$

关系 $a \sim b, b \sim c$ 由传递性给出 $a \sim c$. 因此 a, b, c 必须属于同一个等价类. 另一方面, 将 Y 分成 $\{a, b, c\}, \{d\}$ 所得到的等价关系已经满足全部要求; 由最小性, $\sim$ 不会再把 d 与前三个元素视为等价. 故 $[a] = [b] = [c] = \{a, b, c\}, [d] = \{d\}$, 商集为 $Q = \{[a], [d]\}$. 商映射 $\iota_1 = q$ 把 a, b, c 送到 $[a]$, 把 d 送到 $[d]$; 另一个结构态射 ι_0 把 u, v 都送到 $[a]$.

设 T 为任意集合, 映射 $h: Y \rightarrow T$ 满足 $h \circ f = h \circ g$. 在 u, v 处分别代入, 得到 $h(a) = h(b), h(b) = h(c)$, 而 $h(d)$ 不受限制. 于是唯一的诱导映射 $Q \rightarrow T$ 把 $[a]$ 送到共同的值 $h(a)$, 把 $[d]$ 送到 $h(d)$. 它与 q 的复合在 a, b, c, d 处均与 h 相等, 故复合就是 h .

〔史略〕 函子极限的统一: Kan 的 1958 年论文

极限的早期研究来自带有相容映射的群与空间的系统. 例如, 固定素数 p , p -进整数可由它模 $p^n (n \geq 1)$ 的全部余数刻画; 这些余数在约化映射下彼此相容. 从各层级相容的数据恢复一个对象, 是逆向极限的典型例子. 1945 年, Eilenberg 与 Mac Lane 用函子描述群的有向系统, 以自然变换表述其极限的泛性质.

1958 年, Daniel M. Kan 在《Adjoint Functors》(伴随函子) 中, 把指标集推广为任意小范畴, 统一讨论一般范畴中的极限与余极限. 原文第 7 节称余极限为 *direct limit*, 第 8 节称极限为 *inverse limit*; 今日通常分别使用 *colimit* 与 *limit*.

Kan 还说明了这些构造与对角函子之间的关系. 若 $D: I \rightarrow \mathcal{C}$ 的极限存在, 则对每个 $X \in \mathcal{C}$, 给出态射 $X \rightarrow \lim D$, 等价于给出自然变换 $\Delta X \Rightarrow D$; 若余极限存在, 给出态射 $\text{colim } D \rightarrow X$, 则等价于给出自然变换 $D \Rightarrow \Delta X$. 当固定 $I, \mathcal{C}$, 且每个函子 $D: I \rightarrow \mathcal{C}$ 都有相应的极限或余极限时, 这些对应给出极限、余极限函子与对角函子之间的伴随关系. 其核心是: 一个态射与一族相容态射可以相互确定, 而且这种对应与复合相容.



Daniel M. Kan (1927–2013)
拓扑学家, 长期任教于 MIT;
创立伴随函子的理论.

ADJOINT FUNCTORS

BY
DANIEL M. KAN⁽¹⁾

Kan《Adjoint Functors》
1958 年, 原刊第 294 页题名与署名.²

4.3.3 选读:泛函分析中的自然变换

例 4.60 (Banach 空间双对偶). 令 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 考虑以 Banach $\mathbb{F}$ -空间为对象、有界 $\mathbb{F}$ -线性映射为态射的范畴. 线性映射 $T: E \rightarrow F$ 的算子范数为 $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$; T 有界是指这个上确界有限, 此时 $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ 对所有 $x \in E$ 成立.

- (1) 连续对偶. Banach 空间 E 的连续对偶 E' 是所有有界线性泛函 $\lambda: E \rightarrow \mathbb{F}$ 组成的向量空间, 加法与数乘按函数值定义, 范数取为 $\|\lambda\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda(x)|$.

这个范数使 E' 完备. 事实上, 设 (λ_n) 为 E' 中的 Cauchy 列, 则存在常数 C , 使 $\|\lambda_n\| \leq C$ 对所有 n 成立. 对每个 $x \in E$, 不等式 $|\lambda_n(x) - \lambda_m(x)| \leq \|\lambda_n - \lambda_m\| \|x\|$ 说明 $(\lambda_n(x))$ 在完备域 $\mathbb{F}$ 中收敛. 令 $\lambda(x) = \lim_n \lambda_n(x)$. 取极限可知 λ 线性, 且 $|\lambda(x)| \leq C\|x\|$, 故 $\lambda \in E'$. 给定 $\varepsilon > 0$, 当 n, m 充分大时, 对所有 $x \in E$ 有 $|\lambda_n(x) - \lambda_m(x)| \leq \varepsilon\|x\|$. 先令 $m \rightarrow \infty$, 再对 $\|x\| \leq 1$ 取上确界, 得到 $\|\lambda_n - \lambda\| \leq \varepsilon$.

- (2) 双对偶函子. 对有界线性映射 $T: E \rightarrow F$, 前复合定义有界线性映射

$$T': F' \rightarrow E', \quad \lambda \mapsto \lambda \circ T.$$

由 $|\lambda(Tx)| \leq \|\lambda\| \|Tx\|$, 得到 $\|T'\| \leq \|T\|$. 若 $S: F \rightarrow G$ 也有界线性, 则 $(S \circ T)' = T' \circ S'$, 且 $(\text{id}_E)' = \text{id}_{E'}$. 因此连续对偶是反变函子. 再取一次连续对偶, 记 $E'' = (E')'$, $T'' = (T')'$, 便得到协变的双对偶函子 $E \mapsto E'', T \mapsto T''$. 两次反转复合次序给出 $(S \circ T)'' = S'' \circ T''$, 恒等态射也被保持.

- (3) 从恒等函子到双对偶函子的自然变换. 对每个 E , 定义

$$J_E: E \rightarrow E'', \quad J_E(x)(\lambda) = \lambda(x).$$

固定 x 后, 右边关于 λ 线性, 且 $|\lambda(x)| \leq \|\lambda\| \|x\|$, 所以 $J_E(x) \in E''$. 对 x 的线性由求值公式得到, 且 $\|J_E(x)\| \leq \|x\|$. 实、复 Hahn-Banach 定理说明: 对 $x \neq 0$, 存在 $\lambda \in E'$, 使 $\|\lambda\| = 1, \lambda(x) = \|x\|$. 因此 $\|J_E(x)\| = \|x\|$, 故 J_E 是等距嵌入.³

对任意有界线性映射 $T: E \rightarrow F, x \in E$ 和 $\lambda \in F'$, 有

$$(T''(J_E(x)))(\lambda) = J_E(x)(\lambda \circ T) = \lambda(Tx) = J_F(Tx)(\lambda).$$

两个 F'' 中的泛函在每个 $\lambda \in F'$ 上取值相等, 所以 $T'' \circ J_E = J_F \circ T$. 这正是自

²史料: Eilenberg 与 Mac Lane, «General Theory of Natural Equivalences», *Transactions of the American Mathematical Society* 58(1945), 第 21–22 节, 273–277 页; Kan, «Adjoint Functors», 同刊 87(1958), 294–329 页. 余极限与极限分别见定义 7.1, 8.1(309, 312 页), 伴随刻画见定理 7.8, 8.6(311, 313 页). 同篇第 12 节还包含后来称为 Kan 延拓的早期构造. 肖像: Jonah Kan 摄于 2005 年, Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0, 原图等比例缩放. 书影取自爱丁堡大学所存原论文扫描件, 仅截取题名与署名.

³这里使用 Hahn-Banach 定理的范数保持延拓结论: 一维子空间 $\mathbb{F}x$ 上的泛函 $ax \mapsto a\|x\|$ 可延拓为 E 上范数为 1 的泛函. 参见 András Zsák 讲授, Leonard Tomczak 整理, *Functional Analysis*(2023), 定理 1.4, 第 4 页.

然性等式 (4.1): 给每个 Banach 空间 E 指定 J_E , 便得到从恒等函子到双对偶函子的自然变换.

- (4) J_E 未必满射. 记 ℓ^∞ 为所有有界 $\mathbb{F}$ -数列组成的空间, ℓ^1 为所有绝对可和的 $\mathbb{F}$ -数列组成的空间, 范数分别为 $\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|$ 和 $\|b\|_1 = \sum_{n \geq 1} |b_n|$. 令 $c_0 = \{x \in \ell^\infty : x_n \rightarrow 0\}$, 范数取为 $\|\cdot\|_\infty$. ℓ^∞ 中的 Cauchy 列在每个坐标上收敛, Cauchy 估计对坐标一致, 故收敛于一个有界数列, 且在上确界范数下收敛. 因而 ℓ^∞ 完备. 趋于零的数列的一致极限仍趋于零, 所以 c_0 是闭子空间, 也完备.

下面证明 $b \mapsto \lambda_b$ 给出 ℓ^1 到 c'_0 的等距同构, 其中 $\lambda_b(x) = \sum_{n \geq 1} x_n b_n$. 对 $b \in \ell^1$, 绝对收敛给出 $|\lambda_b(x)| \leq \|x\|_\infty \|b\|_1$. 反过来, 对 $\lambda \in c'_0$, 令 $b_n = \lambda(e_n)$, 其中 e_n 的第 n 项为 1, 其余项为零. 对每个 N , 取只有前 N 项可能非零的数列 x , 使 $|x_n| \leq 1$ 且 $x_n b_n = |b_n|$ ($1 \leq n \leq N$), 便有 $\sum_{n=1}^N |b_n| = |\lambda(x)| \leq \|\lambda\|$. 所以 $b \in \ell^1$. 对任意 $x \in c_0$, 把第 N 项以后的各项置零, 所得数列在上确界范数下趋于 x . 由 λ 连续, 得到 $\lambda(x) = \sum_{n \geq 1} x_n b_n$. 上述两向估计还给出 $\|\lambda\| = \|b\|_1$.

同理, $\mu \in (\ell^1)'$ 决定有界数列 $y_n = \mu(e_n)$, 满足 $|y_n| \leq \|\mu\|$. 将 $b \in \ell^1$ 截断后在 ℓ^1 范数下取极限, 得到 $\mu(b) = \sum_{n \geq 1} y_n b_n$. 反之, 每个 $y \in \ell^\infty$ 由此公式定义有界线性泛函; 上界估计及在 e_n 上取值说明其范数为 $\|y\|_\infty$. 于是 $\mu \mapsto (\mu(e_n))_{n \geq 1}$ 给出 $(\ell^1)'$ 到 ℓ^∞ 的等距同构. 在这些同构下, c'_0 对应于 ℓ^∞ , 而 $J_{c_0}(x)$ 对应的数列恰为 (x_n) . 因此 J_{c_0} 是通常的包含映射, 常值数列 $(1, 1, \dots)$ 不在其像中.

称 Banach 空间 E 为反身空间(reflexive space), 若 J_E 满射. 对反身 Banach 空间及它们之间的有界线性映射, 上述自然变换给出自然同构.

例 4.61 (Gelfand 变换的自然性). 考虑以非零交换含么复 Banach 代数对象、有界 $\mathbb{C}$ -代数同态为态射的范畴; 代数范数满足 $\|1\| = 1$, 同态按约定保持么元. 沿用第三讲记号, $\Delta(A)$ 表示 A 的 Gelfand 谱; 本例中的 Δ 与前面的对角函子无关.

- (1) 从代数到连续函数代数. 回忆第三讲: $\Delta(A)$ 由特征标 $\chi: A \rightarrow \mathbb{C}$ 组成, 取求值拓扑. 为使 $A \mapsto C(\Delta(A), \mathbb{C})$ 成为本例范畴上的函子, 先验证其像仍是 Banach 代数. 每个特征标都满足 $|\chi(a)| \leq \|a\|$. 否则 $\|a/\chi(a)\| < 1$, 由第三讲命题 1.74, $1 - a/\chi(a)$ 可逆, 却被 χ 送到零, 矛盾. 又由极大理想的存在性及命题 1.78, $\Delta(A)$ 非空.

把特征标 χ 看作乘积空间 $\prod_{a \in A} \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|a\|\}$ 中的一个点. 条件 $\chi(a+b) = \chi(a) + \chi(b)$ 、 $\chi(ca) = c\chi(a)$ 、 $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ 、 $\chi(1) = 1$ 分别给出这个乘积空间的闭子集, 其中 $a, b \in A$ 、 $c \in \mathbb{C}$. 它们的交恰为 $\Delta(A)$, 相应子空间拓扑就是求值拓扑. 由 Tychonoff 定理, 紧空间的任意乘积仍紧, 故 $\Delta(A)$ 是紧 Hausdorff 空间. 连续函数环 $C(\Delta(A), \mathbb{C})$ 取逐点运算及一致范数 $\|h\|_\infty = \sup_{\chi \in \Delta(A)} |h(\chi)|$. 连续函数的一致极限仍连续, 故它完备; 逐点乘法给出次乘性, 常值函数 1 的范数为 1. 因而它仍是本例范畴中的对象.

对态射 $\varphi : A \rightarrow B$, 定义

$$\Delta(\varphi) : \Delta(B) \rightarrow \Delta(A), \quad \chi \mapsto \chi \circ \varphi.$$

对每个 $a \in A$, 求值 $\chi \mapsto (\chi \circ \varphi)(a) = \chi(\varphi(a))$ 连续, 故由求值拓扑的定义, $\Delta(\varphi)$ 连续. 再把连续函数与它复合, 得到

$$\Delta(\varphi)^* : C(\Delta(A), \mathbb{C}) \rightarrow C(\Delta(B), \mathbb{C}), \quad h \mapsto h \circ \Delta(\varphi).$$

这是含么 $\mathbb{C}$ -代数同态, 且 $\|\Delta(\varphi)^*h\|_\infty \leq \|h\|_\infty$. 若还有态射 $\psi : B \rightarrow D$, 则由复合公式 $\Delta(\psi \circ \varphi) = \Delta(\varphi) \circ \Delta(\psi)$, 对 $h \in C(\Delta(A), \mathbb{C})$ 有

$$\Delta(\psi)^*(\Delta(\varphi)^*h) = h \circ \Delta(\varphi) \circ \Delta(\psi) = \Delta(\psi \circ \varphi)^*h.$$

恒等同态给出恒等映射, 所以 $A \mapsto C(\Delta(A), \mathbb{C})$ 、 $\varphi \mapsto \Delta(\varphi)^*$ 定义了这个 Banach 代数范畴上的协变函子.

(2) *Gelfand* 变换给出的自然变换. 对每个 A , 定义

$$\Gamma_A : A \rightarrow C(\Delta(A), \mathbb{C}), \quad \Gamma_A(a)(\chi) = \chi(a).$$

求值拓扑保证 $\Gamma_A(a)$ 连续. 特征标的代数性质说明 Γ_A 是含么代数同态, 且 $\|\Gamma_A(a)\|_\infty \leq \|a\|$, 故它是本例范畴中的态射. 对 $\varphi : A \rightarrow B$ 、 $a \in A$ 及 $\chi \in \Delta(B)$,

$$(\Delta(\varphi)^*(\Gamma_A(a)))(\chi) = (\chi \circ \varphi)(a) = \Gamma_B(\varphi(a))(\chi).$$

两个连续函数在每个 χ 处取值相同, 故 $\Delta(\varphi)^* \circ \Gamma_A = \Gamma_B \circ \varphi$. 由自然性等式 (4.1), 给每个 A 指定 Γ_A , 便得到从恒等函子到上述连续函数代数函子的自然变换.

(3) Γ_A 未必单射. 取 $A = \mathbb{C}[T]/(T^2)$, 记 ε 为 T 的剩余类. 每个元素唯一写成 $a + b\varepsilon$, 定义 $\|a + b\varepsilon\| = |a| + |b|$. 这个赋范空间与取上述范数的 $\mathbb{C}^2$ 相同, 故完备. 由 $\varepsilon^2 = 0$, 有

$$\|(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon)\| = |ac| + |ad + bc| \leq (|a| + |b|)(|c| + |d|).$$

因此 A 是本例所考虑的 Banach 代数. 每个特征标都满足 $\chi(\varepsilon)^2 = 0$, 故 $\chi(\varepsilon) = 0$; 反过来, $a + b\varepsilon \mapsto a$ 确实是特征标. 所以 $\Delta(A)$ 只有一个点, $C(\Delta(A), \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$, 而 $\Gamma_A(a + b\varepsilon) = a$. 它的核是非零理想 $\mathbb{C}\varepsilon$, 故这个自然变换不一定是自然同构.

4.3.4 选读:仿射概形与素谱函子

第九讲把交换含么环 A 对应为仿射概形 $(\text{Spec} A, \mathcal{O}_{\text{Spec} A})$. 仿射概形之间的态射既要指定点的映射,也要指定开集上函数的拉回.

先回顾函数的点值. 设 $U \subseteq \text{Spec} A$ 为开集, $x = \mathfrak{p} \in U, s \in \mathcal{O}_{\text{Spec} A}(U)$. 在包含 x 的主开集 $D(b) \subseteq U$ 上, s 的限制可写成 a/b^n , 其中 $a, b \in A, n \geq 0$. 它在 x 的取值是 $s(x) = a(x)/b(x)^n \in \kappa(x)$. 这里 $b \notin \mathfrak{p}$, 故分母非零; 第九讲主开集函数环的构造保证此值不依赖分式表达. 更换主开邻域时, 将两种表达限制到交集, 仍得到同一取值.

还有一个等价描述: $s(x) \neq 0$ 当且仅当 s 在 x 的某个开邻域上可逆. 事实上, 若 $a \notin \mathfrak{p}$, 则 $x \in D(ab) \subseteq D(b)$, s 在 $D(ab)$ 上的逆元为 b^n/a ; 反之, $st = 1$ 蕴含 $s(x)t(x) = 1$, 故 $s(x) \neq 0$. 因此, 函数在一点是否消失, 可由函数环和限制映射来判定, 不依赖将仿射概形识别为某个素谱的方式.

定义 4.62 (仿射概形态射). 设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 、 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ 为仿射概形. 从 X 到 Y 的态射 (*morphism*) 由连续映射 $f: X \rightarrow Y$, 以及对每个开集 $U \subseteq Y$ 给定的含么环同态

$$f_U^\# : \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}U)$$

组成. 这些同态称为函数的拉回, 并须满足:

- (1) 对开集 $V \subseteq U$ 和 $s \in \mathcal{O}_Y(U)$, 有 $f_U^\#(s)|_{f^{-1}V} = f_V^\#(s|_V)$;
- (2) 对 $x \in f^{-1}U$ 和 $s \in \mathcal{O}_Y(U)$, 有 $s(f(x)) = 0$ 当且仅当 $f_U^\#(s)(x) = 0$.

两点 $f(x)$ 与 x 的剩余域可能不同, 所以上述条件比较的是点值是否为零.

设 $(f, f^\#) : X \rightarrow Y$ 、 $(g, g^\#) : Y \rightarrow Z$ 为仿射概形态射. 它们的复合在点上取 $g \circ f$, 在每个开集 $U \subseteq Z$ 上规定 $(g \circ f)_U^\# = f_{g^{-1}U}^\# \circ g_U^\#$. 这仍与限制映射相容, 因为先后施行的两个拉回都与限制相容. 对 $x \in (g \circ f)^{-1}U$ 和 $s \in \mathcal{O}_Z(U)$, 依次使用定义中的第二个条件, 得到

$$s(g(f(x))) = 0 \iff g_U^\#(s)(f(x)) = 0 \iff f_{g^{-1}U}^\#(g_U^\#(s))(x) = 0.$$

所以复合也满足第二个条件. 恒等态射在点上及各开集的函数环上均取恒等映射. 映射复合的结合律和恒等律由此给出范畴公理; 所得仿射概形范畴记为 **AffSch**.

例 4.63 (带结构层的素谱函子). 设 A, B 为交换含幺环, $\varphi : A \rightarrow B$ 为含幺环同态. 记 $Y = \operatorname{Spec} A, X = \operatorname{Spec} B$, 并令 $f = \operatorname{Spec}(\varphi) : X \rightarrow Y$.

- (1) 构造函数拉回. 对 $b \in A$, 已有 $f^{-1}(D_A(b)) = D_B(\varphi(b))$. 在这个主开集上规定

$$f_{D_A(b)}^\# : \mathcal{O}_Y(D_A(b)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_B(\varphi(b))), \quad \frac{a}{b^n} \longmapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)^n}.$$

按第九讲的构造, 两端的函数环分别为 $A[S]/(bS - 1)$ 与 $B[T]/(\varphi(b)T - 1)$. 将系数按 φ 取像, 并把 S 送到 T , 关系 $bS = 1$ 就被送到 $\varphi(b)T = 1$. 因此上述分式公式定义良好, 且给出含幺环同态. 限制到更小的主开集时, 环元素仍按 φ 取像, 逆元的像又由逆元唯一性确定, 所以这些同态与限制相容.

对任意开集 $U \subseteq Y$ 和 $s \in \mathcal{O}_Y(U)$, 用主开集 $D_A(b) \subseteq U$ 覆盖 U , 分别拉回 $s|_{D_A(b)}$. 两个主开集的交仍为主开集; 由刚验证的相容性, 所得函数在交集的原像上一致. 层的拼接性质给出唯一的 $f_U^\#(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}U)$. 环运算和限制都可在这些开集上检验, 故 $f_U^\#$ 是与限制相容的含幺环同态. 若 $q \in D_B(\varphi(b))$, 则分式 $\varphi(a)/\varphi(b)^n$ 在 q 处为零, 当且仅当 $\varphi(a) \in q$, 即 $a \in f(q)$. 这等价于 a/b^n 在 $f(q)$ 处为零, 故定义中的第二个条件也成立.

- (2) 函子性. 恒等环同态给出恒等拉回; 复合两个环同态时, 分式的分子与分母依次取像. 这与仿射概形态射的复合一致, 故得到函子 $\operatorname{Spec} : \mathbf{CRing}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{AffSch}$, 它把 A 送到 $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$, 把 φ 送到 $(f, f^\#)$. 只取底层拓扑空间及连续映射, 便得到遗忘函子 $\mathbf{AffSch} \rightarrow \mathbf{Top}$. 它与 Spec 复合, 得到例 4.47 中的拓扑空间值函子.

- (3) 从仿射概形态射恢复环同态. 反过来, 任一态射 $(f, f^\#) : \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A$ 在全局函数上给出环同态 $\varphi = f_Y^\# : A \rightarrow B$. 由定义中的第二个条件, 对每个 $q \in \operatorname{Spec} B$ 和 $a \in A$, $a \in f(q)$ 当且仅当 $\varphi(a) \in q$, 故 $f = \operatorname{Spec}(\varphi)$, 特别地 $f^{-1}(D_A(b)) = D_B(\varphi(b))$. 在主开集 $D_A(b)$ 上, 与限制相容说明 a 被拉回为 $\varphi(a)$; b^{-1} 则必须被拉回为 $\varphi(b)^{-1}$, 因为含幺环同态保持逆元. 因而主开集上的拉回只能是第 (1) 项的分式公式. 层的拼接唯一性再确定所有开集上的拉回. 这说明两个构造互为逆, 得到双射

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{AffSch}}(\operatorname{Spec} B, \operatorname{Spec} A) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbf{CRing}}(A, B).$$

其中 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) = A$ 恢复环, 函数拉回恢复环同态.⁴

例 4.64 (平方映射与函数拉回). 设 k 为域, T, U 为不定元. 令 $\varphi : k[T] \rightarrow k[U]$ 为把 T 送到 U^2 、固定 k 中元素的环同态, 它诱导仿射概形态射 $f : \operatorname{Spec} k[U] \rightarrow \operatorname{Spec} k[T]$.

- (1) 点的像. 对 $b \in k$, 有 $f((U - b)) = (T - b^2)$. 事实上, $P(T) \in \varphi^{-1}((U - b))$

⁴标准的仿射概形态射对应见 The Stacks Project, Lemma 26.6.4(Tag 01I1).

当且仅当 $P(b^2) = 0$, 后者又等价于 $P(T)$ 被 $T - b^2$ 整除. 因而在由 k 中元素给出的点上, f 就是 $b \mapsto b^2$.

- (2) 函数的拉回. 全局函数 $P(T)$ 被拉回为 $P(U^2)$. 又因 $f^{-1}(D(T)) = D(U^2) = D(U)$, $D(T)$ 上的函数 $1/T$ 被拉回为 $D(U)$ 上的函数 $1/U^2$. 这与复分析中将函数代入平方映射的计算相同.

习题

- (1) 单对象范畴之间的函子. 设 M, N 为幺半群, 并用第十一讲的构造得到单对象范畴 $\mathcal{C}_M, \mathcal{C}_N$. 证明函子 $\mathcal{C}_M \rightarrow \mathcal{C}_N$ 与幺半群同态 $M \rightarrow N$ 一一对应. 再说明当 M, N 是群时, 函子公理如何保证逆元被保持.
- (2) 由同态产生自然变换. 设 A 为交换含幺环, $v: N \rightarrow N'$ 为 A -模同态. 证明 $(\text{id}_M \otimes v)_M$ 给出自然变换 $- \otimes_A N \Rightarrow - \otimes_A N'$. 再写出 v 诱导的自然变换 $\text{Hom}_A(N', -) \Rightarrow \text{Hom}_A(N, -)$, 并用一个交换方块解释这里的方向.
- (3) 标量扩张的自然映射能否为同构. 取 $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 沿用例 4.50 的自然变换 $\eta_M: m \mapsto 1 \otimes m$. 用第十一讲的商模张量公式, 分别在 $M = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 时求 η_M 的核与像. 对商同态 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 写出自然性方块中的四个映射. 说明为何一个分量是同构, 不足以使整个自然变换成为自然同构.
- (4) 群同态之间的自然变换. 设 G, H 为群, $\varphi, \psi: G \rightarrow H$ 为群同态, 并把它们看成单对象范畴之间的函子. 证明从 φ 到 ψ 的自然变换, 与满足 $h\varphi(g) = \psi(g)h$ 对所有 $g \in G$ 成立的元素 $h \in H$ 一一对应. 证明每个这样的自然变换都是自然同构, 并把条件改写为共轭等式.
- (5) 离散指标的函子范畴. 设 I_2 是正文中的两对象离散范畴. 直接用定义说明 $\text{Fun}(I_2, \mathcal{C})$ 中的对象是一对 $\mathcal{C}$ 中的对象, 自然变换是一对相应的态射; 两个自然变换复合时, 把它们在对象 0 处指定的态射复合, 再把对象 1 处的态射复合. 据此写出对角函子 Δ 在对象与态射上的作用, 并展开积与余积的泛性质.
- (6) 空指标与一个箭头. 设 $I_\emptyset$ 是没有对象的范畴. 证明从 $I_\emptyset$ 到任意范畴 $\mathcal{C}$ 有唯一函子, 并证明它的极限就是 $\mathcal{C}$ 的终对象, 余极限就是 $\mathcal{C}$ 的始对象 (在相应对象存在时). 分别写出 **Set**, **Grp** 中的答案. 提示: 空指标时, 态射族只有唯一的空族. 再令 $I_\rightarrow$ 只有两个对象及一条非恒等态射 $\alpha: 0 \rightarrow 1$, 其图示为

$$I_\rightarrow: \quad \begin{array}{ccc} & \alpha & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 0 & & 1 \end{array}$$

设 $D: I_\rightarrow \rightarrow \mathcal{C}$ 把 α 送到态射 $f: X \rightarrow Y$. 直接证明其极限可取 X , 余极限可取 Y , 并写出全部结构态射.

- (7) 笛卡尔积、不交并与普通并集. 取 $X = \{0, 1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$. 分别列出 $X \times Y$ 、 $X \sqcup Y$ 、 $X \cup Y$ 的元素, 并比较元素个数. 构造到 $\{0, 1\}$ 的映射 $a : X \rightarrow \{0, 1\}$ 、 $b : Y \rightarrow \{0, 1\}$, 使它们不能同时延伸到 $X \cup Y$, 但能唯一延伸到 $X \sqcup Y$. 再证明对任意集合 T , 积与余积的泛性质分别给出双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(T, X \times Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(T, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(T, Y),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X \sqcup Y, T) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, T) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(Y, T).$$

- (8) 群的积与余积: 构造与验证. 设 G, H 为群. 按下列步骤证明例 4.56、例 4.57 中的结论.⁵

- (a) 直积. 在 $G \times H$ 上定义 $(g, h)(g', h') = (gg', hh')$. 验证这给出群结构, 写出幺元与逆元, 并证明两个坐标投影都是群同态. 对任意群 K 及群同态 $a : K \rightarrow G$ 、 $b : K \rightarrow H$, 证明 $u(k) = (a(k), b(k))$ 是满足 $p_G \circ u = a$ 、 $p_H \circ u = b$ 的唯一群同态.
- (b) 约化词与约化操作. 给两个因子的元素加上不同标签; 由这些带标签元素排成的有限序列称为有限词. 记全部约化词组成的集合为 W , 其中包括空词 ε . 对任意有限词, 允许删去幺元字母, 或把同一因子的两个相邻字母替换为它们的乘积; 若乘积为幺元, 就将其删去. 证明反复进行这些操作必在有限步后得到约化词.
- (c) 左端添加一个字母. 固定其中一个带标签的因子 F 及 $a \in F$. 定义 $L_a : W \rightarrow W$: 当 $a = 1_F$ 时, 令 $L_a = \mathrm{id}_W$; 当 $a \neq 1_F$ 时, 在左端添加 a , 若原词的首字母也来自 F , 就在 F 内相乘, 并删去可能出现的幺元. 证明对任意 $a, b \in F$, 有

$$L_a \circ L_b = L_{ab},$$

并由此证明 L_a 是置换, 逆为 $L_{a^{-1}}$. 提示: 每个约化词可唯一写成 cw , 其中 $c \in F$ 允许为幺元, w 为空词或以另一因子的字母开头; $c = 1_F$ 时省去它. 比较两个映射在 cw 上的值, 并处理 $bc = 1_F$ 的情形.

- (d) 约化结果的唯一性. 对任意有限词 $w = s_1 \cdots s_n$, 令 $L_w = L_{s_1} \circ \cdots \circ L_{s_n}$, 并令 $L_\varepsilon = \mathrm{id}_W$. 证明每一步约化都不改变 L_w , 且对约化词 r 有 $L_r(\varepsilon) = r$. 据此证明, 同一个有限词无论按何种次序约化, 最终得到的约化词都相同.

- (e) 自由积的群结构. 对 $u, v \in W$, 把拼接词 uv 的约化结果记为 $u \cdot v$. 证明

$$L_{u \cdot v} = L_u \circ L_v,$$

并利用 $r \mapsto L_r$ 在 W 上的单射性, 从置换复合的结合律推出乘法的结合律.

⁵约化词及其置换构造参见 Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, 第 41–42 页.

验证空词为幺元, $s_1 \cdots s_n$ 的逆元为 $s_n^{-1} \cdots s_1^{-1}$. 由此得到群 $G * H$.

把各因子的非幺元送到单字母词、幺元送到空词, 证明所得 $i_G: G \rightarrow G * H$ 、 $i_H: H \rightarrow G * H$ 都是单射群同态.

(f) 自由积的泛性质. 设 K 为群, $a: G \rightarrow K, b: H \rightarrow K$ 为群同态. 对约化词 $s_1 \cdots s_n$, 把每个来自 G 的字母经 a 映入 K , 来自 H 的字母经 b 映入 K , 再按原次序相乘; 空词映到 1_K . 证明所得映射 $v: G * H \rightarrow K$ 是满足 $v \circ i_G = a$ 、 $v \circ i_H = b$ 的唯一群同态. 提示: 先说明约化操作不改变这些像的乘积, 再利用单字母词生成 $G * H$.

(g) 直积中附带的交换关系. 设 $a: G \rightarrow K, b: H \rightarrow K$ 为群同态. 证明存在群同态 $v: G \times H \rightarrow K$, 满足 $v(g, 1_H) = a(g), v(1_G, h) = b(h)$, 当且仅当 $a(g)b(h) = b(h)a(g)$ 对所有 $g \in G, h \in H$ 成立; 若存在, 则 v 唯一. 取 $G = H = C_2, K = S_3$, 把两个因子的非幺元分别送到换位 (12)、(23), 证明此时不存在这样的 $G \times H \rightarrow K$, 但存在唯一相应的群同态 $G * H \rightarrow K$.

(9) 自由积中的约化计算. 令 $C_2 = \{1, a\}, C_3 = \{1, b, b^2\}$, 其中 $a^2 = 1, b^3 = 1$. 在 $C_2 * C_3$ 中求 $(ab^2a)(aba), (ba)(ab^2a)$ 的约化词, 并求 ab^2a 的逆元. 证明 $(ab)^n (n \geq 1)$ 互不相同, 从而 $C_2 * C_3$ 是无限群. 再证明任意群 G 与平凡群 $\{1\}$ 的自由积同构于 G , 并说明这一同构与结构同态相容.

(10) 同一对映射的极限与余极限. 取 $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{a, b, c, d\}$, 令

x	0	1	2
$f(x)$	a	b	d
$g(x)$	b	c	d

求 f, g 的等化子 $E \rightarrow X$ 与余等化子 $Y \rightarrow Q$, 并写出极限的结构态射 $E \rightarrow X, E \rightarrow Y$ 及余极限的结构态射 $X \rightarrow Q, Y \rightarrow Q$. 对任意集合 T , 说明哪些映射 $T \rightarrow X$ 通过等化子分解, 哪些映射 $Y \rightarrow T$ 通过余等化子分解, 并证明唯一性.

(11) 生成等价关系的传递性. 设整数 $n \geq 2$, 取集合映射 $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(k) = k, g(k) = k + n$. 证明由全部配对 $f(k) \sim g(k)$ 生成的最小等价关系恰好是模 n 同余, 故余等化子可取集合 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 及通常的商映射. 求这两个映射的等化子. 另取 $f, g: \{*\} \rightarrow \{a, b, c\}, f(*) = a, g(*) = b$, 求余等化子, 并说明为什么元素 c 保持为单独的等价类.

(12) 偏序集中的积与余积. 把偏序集 $(P, \leq)$ 看成范畴, 固定 $p, q \in P$, 令 $D: I_2 \rightarrow P$ 取值为 p, q . 证明 D 的极限存在当且仅当 p, q 有下确界, 余极限存在当且仅当它们有上确界, 并指出相应的结构态射. 应用于集合 S 的全体子集按包含关系组成的偏序集, 求两个子集的积与余积. 最后取偏序集 $P = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, 说明其中 $\{1\}, \{2\}$ 的余积存在而积不存在.