

5.1 第 13 讲 极限的计算、自由模与张量伴随

第十二讲用泛性质统一积、余积、等化子与余等化子. 本讲先把这些泛性质化为集合与交换环中的具体计算, 再研究自由模与张量积的泛性质如何随输入对象一起变化, 从而引出伴随函子. 自由模与张量积分别沿用第十、十一讲; 这里着重研究它们给出的映射对应. 本讲中的指标范畴均为小范畴, 即其对象全体与态射全体都是集合.

5.1.1 集合中的极限与余极限

设 I 为小范畴, $D : I \rightarrow \mathbf{Set}$ 为函子. 沿用第十二讲的结构态射 $p_i : \lim D \rightarrow D(i)$ 与 $\iota_i : D(i) \rightarrow \text{colim } D$. 它们对每个 $u : i \rightarrow j$ 分别满足 $D(u)p_i = p_j$ 与 $\iota_j D(u) = \iota_i$. 在集合中, 前者选出积中的相容元素, 后者把不交并中的相关元素识别起来.

命题 5.1 (相容族给出集合的极限). 函子 D 的极限是相容族构成的集合

$$\lim D = \{(x_i) \in \prod_{i \in \text{Obj}(I)} D(i) : D(u)(x_i) = x_j \text{ 对每个态射 } u : i \rightarrow j \text{ 成立}\}.$$

结构态射 $p_i : \lim D \rightarrow D(i)$ 是第 i 个坐标投影在此集合上的限制.

证明. 由 $\lim D$ 中元素满足的相容条件, 有 $D(u) \circ p_i = p_j$. 设 T 为集合, 并给定映射 $f_i : T \rightarrow D(i)$, 满足对每个态射 $u : i \rightarrow j$ 都有 $D(u) \circ f_i = f_j$. 对每个 $t \in T$, $D(u)(f_i(t)) = f_j(t)$, 故 $(f_i(t))_{i \in \text{Obj}(I)} \in \lim D$. 因此映射

$$f : T \longrightarrow \lim D, \quad t \longmapsto (f_i(t))_{i \in \text{Obj}(I)}$$

满足 $p_i \circ f = f_i$. 任何满足 $p_i \circ f = f_i$ 的映射, 在每个 t 处的第 i 个坐标都必须是 $f_i(t)$, 故 f 唯一. 这就验证了极限的泛性质.

若 I 没有对象, 则空积只有一个元素, 即空元组, 相容条件也为空. 因此 $\lim D$ 是单点集; 从任意集合到它恰有一个映射, 仍满足上述泛性质. $\square$

构造余极限时, 对每个态射 $u : i \rightarrow j$, 须把 $x \in D(i)$ 与 $D(u)(x) \in D(j)$ 视为同一元素. 在带标记的不交并

$$\coprod_{i \in \text{Obj}(I)} D(i) = \{(i, x) : i \in \text{Obj}(I), x \in D(i)\}$$

上取包含下列所有配对的最小等价关系 $\sim$:

$$(i, x) \sim (j, D(u)(x)) \quad (u : i \rightarrow j, x \in D(i)).$$

最小等价关系的存在性与第十二讲集合余等化子的构造相同. 具体判断时, $(i, x) \sim (j, y)$ 当且仅当二者可由有限步连接, 每一步把某个 (k, z) 换成 $(\ell, D(v)(z))$, 或反向使用这种配对. 允许零步; 反向行走与拼接路径分别保证对称性与传递性. 因此, 这种有限路径关系正是由上述配对生成的等价关系.

命题 5.2 (不交并的商给出集合的余极限). 函子 D 的余极限是

$$\operatorname{colim} D = \left(\coprod_{i \in \operatorname{Obj}(I)} D(i) \right) / \sim.$$

其结构态射 $\iota_i : D(i) \rightarrow \operatorname{colim} D$ 把 x 送到 (i, x) 的等价类.

证明. 生成 $\sim$ 的配对保证 $\iota_j \circ D(u) = \iota_i$. 设 T 为集合, 并给定映射 $g_i : D(i) \rightarrow T$, 满足对每个态射 $u : i \rightarrow j$ 都有 $g_j \circ D(u) = g_i$. 定义 $g : \coprod_{i \in \operatorname{Obj}(I)} D(i) \rightarrow T$, 令 $g(i, x) = g_i(x)$. 关系“在 g 下有相同的像”是不交并上的等价关系, 并包含上述所有配对, 所以 g 在每个 $\sim$ -等价类上为常值. 它因而诱导映射

$$\bar{g} : \operatorname{colim} D \rightarrow T, \quad [(i, x)] \mapsto g_i(x),$$

且 $\bar{g} \circ \iota_i = g_i$. 每个等价类都有形式 $[(i, x)]$, 故这些等式唯一确定 $\bar{g}$.

若 I 没有对象, 则不交并及其商集都是空集, 即 $\operatorname{colim} D = \emptyset$. 从空集到任意集合恰有一个映射, 故空集满足这个函子的余极限泛性质. $\square$

例 5.3 (一个映射确定的函子). 设 $f : X \rightarrow Y$ 为集合映射, 取指标范畴 I 如下, 并指定函子 D 的像:

$$I : \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{u} & \bullet \\ 0 & & 1 \end{array} \xrightarrow{D} X \xrightarrow{f} Y$$

本讲的指标范畴图均以黑点表示对象, 只画非恒等态射.

(1) D 的极限. 命题 5.1 给出 $\lim D = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = y\}$. 第一投影 $\lim D \rightarrow X$ 与 $x \mapsto (x, f(x))$ 互逆. 在此识别下, 两个结构映射为 id_X 与 f .

(2) D 的余极限. 带标记的不交并为 $(\{0\} \times X) \amalg (\{1\} \times Y)$, 生成关系是 $(0, x) \sim (1, f(x))$. 映射 $(0, x) \mapsto f(x)$ 、 $(1, y) \mapsto y$ 在生成关系两端取值相同, 因而诱导映射 $\operatorname{colim} D \rightarrow Y$. 其逆为 $y \mapsto [(1, y)]$: 对来自 X 的等价类, 复合给出 $[(1, f(x))] = [(0, x)]$; 对来自 Y 的等价类, 复合直接保持它不变. 所以 $\operatorname{colim} D \cong Y$, 结构映射为 $f : X \rightarrow Y$ 与 $\operatorname{id}_Y : Y \rightarrow Y$.

5.1.2 交换环中的等化子与余等化子

在交换环中, 等化子仍由相等条件选出子集; 余等化子则要使商映射保持环运算, 因此必须商去一个理想. 沿用 **CRing** 表示允许零环的交换含幺环范畴. 设 R, S 为交换含幺环, $f, g: R \rightarrow S$ 为保幺环同态. 取下图中的指标范畴 I , 并令函子 $D: I \rightarrow \mathbf{CRing}$ 把两个非恒等态射分别送到 f, g :

$$I: \begin{array}{ccc} & \bullet & \\ & \curvearrowright & \\ 0 & & 1 \\ & \curvearrowleft & \\ & \bullet & \end{array} \xrightarrow{D} \begin{array}{ccc} & R & \\ & \curvearrowright & \\ & & S \\ & \curvearrowleft & \\ & R & \end{array}$$

命题 5.4 (交换环中的等化子与余等化子). 设 R, S 为交换含幺环, $f, g: R \rightarrow S$ 为保幺环同态. 则

$$\mathrm{Eq}(f, g) = \{r \in R : f(r) = g(r)\} \hookrightarrow R, \quad S \twoheadrightarrow S/J$$

分别是 f, g 在 **CRing** 中的等化子和余等化子, 其中 $J = (f(r) - g(r) : r \in R)$ 是全部差 $f(r) - g(r)$ 生成的理想.

证明. 对平行箭头图, 锥中的第二个态射由第一个确定, 余锥中的第一个由第二个确定. 因此只需验证第十二讲所述的单个态射的分解性质.

- (1) f, g 的等化子. 因为 f, g 保持加法、乘法与幺元, 集合 $\mathrm{Eq}(f, g)$ 包含 1, 且对加法、加法逆元与乘法封闭, 故是 R 的含幺子环. 记包含映射为 $e: \mathrm{Eq}(f, g) \rightarrow R$, 则 $f \circ e = g \circ e$. 设 T 为交换含幺环, 保幺环同态 $h: T \rightarrow R$ 满足 $f \circ h = g \circ h$, 则其像落在 $\mathrm{Eq}(f, g)$ 中. 公式 $\bar{h}(t) = h(t)$ 定义了保幺环同态 $\bar{h}: T \rightarrow \mathrm{Eq}(f, g)$, 满足 $e \circ \bar{h} = h$, 其唯一性由 e 的单射性得到.
- (2) f, g 的余等化子. 理想 J 包含全部差 $f(r) - g(r)$, 所以商映射 $q: S \rightarrow S/J$ 满足 $q \circ f = q \circ g$. 设 T 为交换含幺环, 保幺环同态 $k: S \rightarrow T$ 满足 $k \circ f = k \circ g$, 则 $\ker k$ 包含全部这些差. 因 $\ker k$ 是理想, 它包含 J , 从而 $s + J \mapsto k(s)$ 与代表元无关, 给出保幺环同态 $S/J \rightarrow T$. 这个同态与 q 的复合为 k , 且由 q 的满射性唯一确定. 若 $J = S$, 则 S/J 为零环. 此时 $J \subseteq \ker k$ 蕴含 $1_T = k(1_S) = 0_T$, 故 T 也为零环, 上述分解仍成立. $\square$

差映射 $f - g$ 的像是 S 的加法子群, 但未必是理想. 因此, 计算 f, g 的余等化子时, 须将 S 商去全部差 $f(r) - g(r)$ 生成的理想.

例 5.5 (多项式与常数项). 取环同态 $f, g: \mathbb{Z}[T] \rightarrow \mathbb{Z}[T]$, 对每个 $p(T) \in \mathbb{Z}[T]$, 规定 $f(p(T)) = p(T)$, $g(p(T)) = p(0)$, 后者把常数项看作常数多项式.

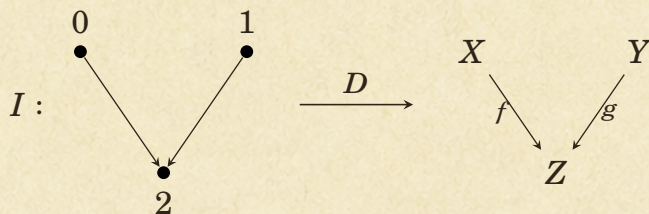
- (1) f, g 的等化子. 等式 $p(T) = p(0)$ 恰好表示 p 为常数, 所以 f, g 的等化子是 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[T]$.

(2) f, g 的余等化子. 每个差 $p(T) - p(0)$ 都被 T 整除, 而取 $p(T) = T$ 就得到差 T , 所以这些差生成理想 (T) . f, g 的余等化子为 $\mathbb{Z}[T] \rightarrow \mathbb{Z}[T]/(T) \cong \mathbb{Z}$, 即求常数项的映射. 注意它的目标是 $\mathbb{Z}$, 而原来 g 的目标是 $\mathbb{Z}[T]$.

例 5.6 (余等化子可以是零环). 取 $f, g: \mathbb{Z}[T] \rightarrow \mathbb{Z}$, 分别在 $T = 0$ 与 $T = 1$ 处求值. 差 $f(T) - g(T) = -1$ 生成全环, 故 f, g 的余等化子为 $\mathbb{Z} \rightarrow 0$. 若要求目标环非零, 就不存在使 f, g 相等的保么环同态: 这样的同态必须把 0 与 1 送到相同元素. 这说明允许零环对余等化子的存在是必要的.

5.1.3 纤维积与原像

设 $f: X \rightarrow Z, g: Y \rightarrow Z$ 为集合映射. 取指标范畴 I 如下, 非恒等态射只有 $0 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 2$, 并令函子 $D: I \rightarrow \mathbf{Set}$ 把它们分别送到 f, g :



由命题 5.1, D 的极限由满足 $f(x) = z = g(y)$ 的三元组 $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ 组成. 第三个坐标由前两个唯一确定, 故可用满足 $f(x) = g(y)$ 的二元组 (x, y) 表示.

定义 5.7 (集合中的纤维积). 设 $f: X \rightarrow Z, g: Y \rightarrow Z$ 为集合映射. 定义

$$X \times_Z Y := \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\},$$

称为 X, Y 关于 f, g 的纤维积 (fibre product).

对每个 $z \in Z, f^{-1}(\{z\})$ 与 $g^{-1}(\{z\})$ 是相应的纤维. 纤维积把同一点 z 上的两个纤维相乘, 再对各 z 取不交并, 因而得名.

纤维积的泛性质. 坐标投影 $p_X: X \times_Z Y \rightarrow X, p_Y: X \times_Z Y \rightarrow Y$ 满足 $f \circ p_X = g \circ p_Y$. 设 T 为集合, 映射 $u: T \rightarrow X, v: T \rightarrow Y$ 满足 $f \circ u = g \circ v$, 则存在唯一映射

$$w: T \rightarrow X \times_Z Y, \quad t \mapsto (u(t), v(t)),$$

使 $p_X \circ w = u, p_Y \circ w = v$. 等式 $f(u(t)) = g(v(t))$ 保证 $w(t)$ 属于纤维积; 而两个投影的取值唯一确定 $w(t)$, 故 w 唯一. $\square$

定义 5.8 (一般范畴中的纤维积). 设 $f: X \rightarrow Z, g: Y \rightarrow Z$ 为范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射. 对象 $X \times_Z Y$ 连同态射 $p_X: X \times_Z Y \rightarrow X, p_Y: X \times_Z Y \rightarrow Y$ 称为这两个态射的纤维积, 如果

$f \circ p_X = g \circ p_Y$, 并满足: 对任意对象 T 及态射 $u: T \rightarrow X, v: T \rightarrow Y$, 只要 $f \circ u = g \circ v$, 就存在唯一态射 $w: T \rightarrow X \times_Z Y$, 使 $p_X \circ w = u, p_Y \circ w = v$.

上述定义可用交换图表示, 其中虚线箭头由 u, v 唯一确定:

$$\begin{array}{ccccc}
 T & & & & \\
 \swarrow w & & u & \searrow & \\
 & X \times_Z Y & \xrightarrow{p_X} & X & \\
 \downarrow p_Y & & & \downarrow f & \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & &
 \end{array}$$

对于由 f, g 确定的函子 $D: I \rightarrow \mathcal{C}$, 从对象 T 到 D 的相容态射族由 $u: T \rightarrow X, v: T \rightarrow Y$ 确定: 第三个态射必须等于 $f \circ u = g \circ v$. 因此纤维积恰是 D 的极限. 由极限的唯一性, 任意两个纤维积之间都有唯一的同构同时保持两个投影.

例 5.9 (子集的原像). 设 $f: X \rightarrow Z$ 为集合映射.

- (1) 作为纤维积的原像. 取包含映射 $g: Y \hookrightarrow Z$. 由 $g(y) = y$, 可得 $X \times_Z Y = \{(x, f(x)) : x \in f^{-1}(Y)\}$. 第一投影给出 $X \times_Z Y \rightarrow f^{-1}(Y)$ 的双射, 其逆为 $x \mapsto (x, f(x))$. 若 f 也是包含映射, 则 $f^{-1}(Y) = X \cap Y$, 故 $X \times_Z Y \cong X \cap Y$.
- (2) 第一投影未必是双射. 现在改取任意集合映射 $g: Y \rightarrow Z$. 第一投影 $(x, y) \mapsto x$ 给出满射 $X \times_Z Y \rightarrow f^{-1}(g(Y))$: 对每个 $x \in f^{-1}(g(Y))$, 至少有一个 $y \in Y$ 满足 $g(y) = f(x)$, 每个这样的 y 都给出一个映到 x 的元素 (x, y) . 若 g 单射, 这样的 y 唯一, 故上述满射是双射; 若 g 不单射, 同一个 x 可能对应多个 y . 例如取 $X = Z = \{*\}$, $Y = \{0, 1\}$, 令 $f(*) = g(0) = g(1) = *$. 此时 $X \times_Z Y = \{(*, 0), (*, 1)\}$, 而 $f^{-1}(g(Y)) = \{*\}$, 第一投影把 $(*, 0)$ 与 $(*, 1)$ 都送到 $*$.

5.1.4 自由模函子

前面用泛性质计算极限; 现在让泛性质中的输入对象也随之变化. 以第十讲的自由模为例, 指定基上取值可以延伸为唯一的模同态. 我们将把这一对应组织成两个函子之间的伴随. 以下固定交换含么环 A .

定义 5.10 (以集合为基的自由模). 沿用第十讲的记号, 对集合 S , 令 $F(S) = A^{(S)} = \bigoplus_{s \in S} A$. 把标准生成元 e_s 改记为 $[s]$, 并记 $\eta_S: S \rightarrow U(F(S)), s \mapsto [s]$, 其中 U 为遗忘函子. 每个元素唯一写成有限支撑的和 $\sum_s a_s [s]$. 当 $A \neq 0$ 时, 这些 $[s]$ 构成一组基; 当 $A = 0$ 时, $F(S) = 0$.

这里的方括号只表示形式生成元;例如集合 S 若本身是一个模,它原有的加法关系尚未加入 $F(S)$.

对集合映射 $r : S \rightarrow T$, 定义映射

$$F(r) : F(S) \longrightarrow F(T), \quad \sum_{s \in S} a_s [s] \mapsto \sum_{s \in S} a_s [r(s)].$$

右端是 $F(T)$ 中的有限和;若不同的 s 有相同的像 $r(s) = t$, 就在 $[t]$ 的系数中将这些 a_s 相加. 由于 $F(S)$ 中每个元素的系数表示唯一, $F(r)$ 定义无歧义. 有限和的分配律表明 $F(r)$ 保持加法与数乘, 故它是 A -模同态.

对 $S \xrightarrow{r} T \xrightarrow{q} V$, 有

$$F(q \circ r)([s]) = [q(r(s))] = (F(q) \circ F(r))([s]), \quad F(\text{id}_S)([s]) = [s].$$

由于 $[s]$ 生成 $F(S)$, 这些等式在整个自由模上成立. 因此 $F : \mathbf{Set} \rightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$ 是函子, 称为自由模函子.

命题 5.11 (自由模的泛性质). 沿用遗忘函子 $U : A\text{-}\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$. 设 S 为集合, M 为 A -模. 每个集合映射 $b : S \rightarrow U(M)$ 确定唯一的 A -模同态 $\tilde{b} : F(S) \rightarrow M$, 使得对每个 $s \in S$, 都有 $\tilde{b}([s]) = b(s)$, 即 $U(\tilde{b}) \circ \eta_S = b$. 因此有双射

$$\text{Hom}_A(F(S), M) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, U(M)), \quad h \mapsto U(h) \circ \eta_S,$$

且此双射关于 S, M 自然.

证明. 由第十讲自由模的泛性质, b 的唯一线性延伸为 $\tilde{b}(\sum_s a_s [s]) = \sum_s a_s b(s)$. 这给出所述双射的逆; 下面只验证它与输入对象的变化相容.

记命题中的双射为 $\Phi_{S, M}(h) = U(h) \circ \eta_S$. 对集合映射 $r : S' \rightarrow S$, 有 $U(F(r)) \circ \eta_{S'} = \eta_S \circ r$, 因为两边都把 s' 送到 $[r(s')]$. 再给定模同态 $k : M \rightarrow M'$, 由复合的结合律得到

$$\Phi_{S', M'}(k \circ h \circ F(r)) = U(k) \circ \Phi_{S, M}(h) \circ r.$$

也就是说, 先在线性映射一侧复合再限制到基, 与先限制到基再复合集合映射, 结果相同. 这称为双射关于 S, M 自然; 下一节定义 5.12 将分别写出两个变量的相容等式. $\square$

对 A -模 M , 以后把 $F(U(M))$ 简记作 $F(M)$, 即将 M 的底层集合代入上述构造. 由命题 5.11, 恒等集合映射 $U(M) \rightarrow U(M)$ 对应于唯一的 A -模同态

$$\varepsilon_M : F(M) \longrightarrow M, \quad \sum_{m \in M} a_m [m] \mapsto \sum_{m \in M} a_m m.$$

满射性来自 $\varepsilon_M([m]) = m$. 自由模中的 $[0_M]$ 是由 M 的零元素标记的生成元, 而

$0 \in F(M)$ 是所有系数均为零的元素. 当 $A \neq 0$ 时, $[0_M] \neq 0$; 例如零模的底层集合有一个元素, 所以 $F(0) \cong A$.

5.1.5 伴随函子与张量-Hom 对应

对集合 S 与 A -模 M , 命题 5.11 给出了 $\text{Hom}_A(F(S), M)$ 与 $\text{Hom}_{\text{Set}}(S, U(M))$ 之间关于 S, M 自然的双射. 下面将这种关系表述为一般范畴中的定义.

定义 5.12 (伴随函子). 设 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子. 若对所有 $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}$, 都有双射

$$\Phi_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)),$$

并且这些双射关于 X, Y 自然, 则称 F 是 G 的左伴随, G 是 F 的右伴随, 记作

$$F \dashv G.$$

符号 $\dashv$ 左边是左伴随, 右边是右伴随. “关于 X, Y 自然”指以下相容条件: 对任意态射 $a: X' \rightarrow X, b: Y \rightarrow Y', h: F(X) \rightarrow Y$, 都有

$$\begin{aligned}\Phi_{X',Y}(h \circ F(a)) &= \Phi_{X,Y}(h) \circ a, \\ \Phi_{X,Y'}(b \circ h) &= G(b) \circ \Phi_{X,Y}(h).\end{aligned}$$

第一式表示先在 $F(X)$ 一侧复合 $F(a)$, 对应于在 X 一侧复合 a ; 第二式表示在 Y 一侧复合 b , 对应于在 $G(Y)$ 一侧复合 $G(b)$.

命题 5.11 的自然双射说明, 自由模函子 $F: \text{Set} \rightarrow A\text{-Mod}$ 是遗忘函子 U 的左伴随, 即 $F \dashv U$. 前面的 $\eta_S: s \mapsto [s]$ 与 $\varepsilon_M: [m] \mapsto m$ 分别对应于 $\text{id}_{F(S)}$ 与 $\text{id}_{U(M)}$, 称为这个伴随的单位与余单位. 第十四讲将用 ε_M 把形式线性组合送回原来的模.

设 A, B 为交换含幺环, $\varphi: A \rightarrow B$ 为保幺环同态. 对 B -模 N , 在其加法群上规定 $a \cdot n = \varphi(a)n$ ($a \in A, n \in N$), 得到 A -模 $\text{Res}_A^B N$. 每个 B -模同态也保持这一 A -数乘; 在同态上保持原映射, 便得到限制标量函子 $\text{Res}_A^B: B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$.

另一方面, 第十一讲的标量扩张与第十二讲的张量函子给出 $B \otimes_A -: A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$, 在同态 $u: M \rightarrow M'$ 上取 $\text{id}_B \otimes u$. 这里 B 的数乘作用在第一个因子上, 所以该映射是 B -线性的.

命题 5.13 (标量扩张与限制标量). 标量扩张函子 $B \otimes_A -$ 是限制标量函子 Res_A^B 的左伴随, 即 $(B \otimes_A -) \dashv \text{Res}_A^B$. 对任意 A -模 M 与 B -模 N , 有自然双射

$$\text{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \simeq \text{Hom}_A(M, \text{Res}_A^B N).$$

证明. 记所需的对应为

$$\Phi_{M,N}(h)(m) = h(1 \otimes m), \quad h \in \text{Hom}_B(B \otimes_A M, N), \quad m \in M.$$

由张量的加法关系可知 $\Phi_{M,N}(h)$ 保持加法. 对 $\lambda \in A, m \in M$, 有 $h(1 \otimes \lambda m) = h(\varphi(\lambda) \otimes m) = \varphi(\lambda)h(1 \otimes m)$, 所以 $\Phi_{M,N}(h)$ 是 A -线性的. 反过来, 设 $v : M \rightarrow \text{Res}_A^B N$ 为 A -线性映射. 命题 4.32 给出良定义的 B -线性映射 $\tilde{v} : B \otimes_A M \rightarrow N$, 满足 $\tilde{v}(c \otimes m) = cv(m)$, 其中 $c \in B, m \in M$. 由 $\tilde{v}(1 \otimes m) = v(m)$, 有 $\Phi_{M,N}(\tilde{v}) = v$. 另一方面, $h(c \otimes m) = ch(1 \otimes m)$; 纯张量生成 $B \otimes_A M$, 故 $\Phi_{M,N}(h)$ 唯一确定 h . 因此这两个构造互逆.

设 $a : M' \rightarrow M$ 为 A -线性映射, $b : N \rightarrow N'$ 为 B -线性映射. 下式两边都是从 M' 到 $\text{Res}_A^B N'$ 的映射, 在每个 $m' \in M'$ 处均取值 $b(h(1 \otimes a(m')))$, 故

$$\Phi_{M',N'}(b \circ h \circ (\text{id}_B \otimes a)) = \text{Res}_A^B(b) \circ \Phi_{M,N}(h) \circ a,$$

分别取 a, b 为恒等同态, 即得到定义 5.12 中的两条相容等式, 因而所构造的双射关于 M, N 自然. $\square$

第十二讲已定义张量函子与 Hom 函子. 只需回忆: 对 $b : P \rightarrow P', \text{Hom}_A(N, b)$ 把 $h : N \rightarrow P$ 送到 $b \circ h$. 下面的对应把双线性映射的第二个变量暂时保留在 Hom 中.

定理 5.14 (张量- Hom 伴随). 固定 A -模 N . 函子 $- \otimes_A N$ 是函子 $\text{Hom}_A(N, -)$ 的左伴随, 即 $(- \otimes_A N) \dashv \text{Hom}_A(N, -)$. 两者均从 $A\text{-Mod}$ 到自身. 具体地, 对任意 A -模 M, P , 存在自然的 A -模同构

$$\text{Hom}_A(M \otimes_A N, P) \simeq \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, P)).$$

证明. 对模同态 $h : M \otimes_A N \rightarrow P$, 用以下公式定义它的像 $\Phi_{M,P}(h)$:

$$\Phi_{M,P}(h)(m)(n) = h(m \otimes n) \quad (m \in M, n \in N).$$

固定 m 后, $n \mapsto h(m \otimes n)$ 是 A -线性的; 由张量的双线性关系, $m \mapsto \Phi_{M,P}(h)(m)$ 也是 A -线性的. 反过来, 若 $q : M \rightarrow \text{Hom}_A(N, P)$ 为 A -线性映射, 则 $(m, n) \mapsto q(m)(n)$ 是 A -双线性映射, 因而唯一诱导

$$\tilde{q} : M \otimes_A N \rightarrow P, \quad \tilde{q}(m \otimes n) = q(m)(n).$$

对所有 $m \in M, n \in N$, 有 $\Phi_{M,P}(\tilde{q})(m)(n) = \tilde{q}(m \otimes n) = q(m)(n)$, 故 $\Phi_{M,P}(\tilde{q}) = q$. 另一方面, $\widetilde{\Phi_{M,P}(h)}$ 与 h 在每个纯张量上取值相同; 纯张量生成 $M \otimes_A N$, 故二者相等. 因此两个构造互逆. 它们保持映射的逐点加法与数乘, 所以所得双射是 A -模同构.

设 $a : M' \rightarrow M, b : P \rightarrow P'$ 为模同态. 对每个 $m' \in M', n \in N$, 映射 $\Phi_{M',P'}(b \circ h \circ (a \otimes \text{id}_N))(m')$ 在 n 处的值为 $b(h(a(m') \otimes n))$. 这也是 $\text{Hom}_A(N, b)(\Phi_{M,P}(h)(a(m')))$ 在 n 处的值. 所以

$$\Phi_{M',P'}(b \circ h \circ (a \otimes \text{id}_N)) = \text{Hom}_A(N, b) \circ \Phi_{M,P}(h) \circ a.$$

分别取 a, b 为恒等同态, 便得到定义 5.12 中的两条相容等式, 因而所构造的同构关于 M, P 自然. $\square$

5.1.6 选读: 模范畴的对称么半结构

张量积的结合同构、单位同构与交换同构表达了模范畴中的乘法规律. 这些自然同构还须满足下述相容条件.

先说明双函子的含义. 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴. 积范畴 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 的对象是有序对 (X, Y) , 其中 $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}$; 态射 $(X, Y) \rightarrow (X', Y')$ 是一对态射 $(f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y')$, 恒等态射与复合分别在两个坐标中计算. 从积范畴出发的函子称为双函子(bifunctor).

定义 5.15 (么半范畴). 设 $\mathcal{C}$ 为范畴. 在 $\mathcal{C}$ 上指定双函子 $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 、一个么元对象 $I \in \mathcal{C}$, 以及对任意对象 $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ 给出的、关于各变量自然的同构

$$\alpha_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \rightarrow X \otimes (Y \otimes Z), \quad \lambda_X : I \otimes X \rightarrow X, \quad \rho_X : X \otimes I \rightarrow X,$$

分别称为结合同构、左单位同构与右单位同构. 对 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y'$, 记 $f \otimes g : X \otimes Y \rightarrow X' \otimes Y'$ 为双函子 $\otimes$ 作用于 (f, g) 的结果. 若下列相容条件对任意对象 $W, X, Y, Z \in \mathcal{C}$ 成立, 则称这些数据组成一个么半范畴(monoidal category).

- (1) 五边形条件. 从 $((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z$ 到 $W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z))$, 两条调整括号的路径给出相同态射. 下图为节省横向空间, 将对象的张量积简写为并置, 例如 $WX = W \otimes X$:

$$\begin{array}{ccc}
 ((WX)Y)Z & \xrightarrow{\alpha_{W \otimes X, Y, Z}} & (WX)(YZ) \\
 \downarrow \alpha_{W, X, Y} \otimes \text{id}_Z & & \downarrow \alpha_{W, X, Y \otimes Z} \\
 (W(XY))Z & & W(X(YZ)) \\
 \searrow \alpha_{W, X \otimes Y, Z} & & \nearrow \text{id}_W \otimes \alpha_{X, Y, Z} \\
 & W((XY)Z) &
 \end{array}$$

- (2) 三角形条件. 从 $(X \otimes I) \otimes Y$ 到 $X \otimes Y$, 无论直接删去 X 右侧的 I , 还是先改变括

号再删去 Y 左侧的 I , 结果相同:

$$(\mathrm{id}_X \otimes \lambda_Y) \circ \alpha_{X,I,Y} = \rho_X \otimes \mathrm{id}_Y.$$

名称来自这两组复合映射所构成的交换图的形状.

定义 5.16 (对称么半范畴). 设 $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ 为么半范畴. 若对任意对象 $X, Y \in \mathcal{C}$ 配有关于两变量自然的同构 $\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$, 且对任意对象 $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ 满足以下条件, 就称 $\mathcal{C}$ 为对称么半范畴 (symmetric monoidal category).

(1) 对称性. 交换两次得到恒等态射, 即 $\sigma_{Y,X} \circ \sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X \otimes Y}$.

(2) 六边形条件. 把 X 与整体 $Y \otimes Z$ 交换, 与先后把 X 移过 Y 和 Z 相容. 沿用上面的对象简写, 下图两条路径相同:

$$\begin{array}{ccccc}
 (XY)Z & \xrightarrow{\alpha_{X,Y,Z}} & X(YZ) & \xrightarrow{\sigma_{X,Y \otimes Z}} & (YZ)X \\
 \downarrow \sigma_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_Z & & & & \downarrow \alpha_{Y,Z,X} \\
 (YX)Z & \xrightarrow{\alpha_{Y,X,Z}} & Y(XZ) & \xrightarrow{\mathrm{id}_Y \otimes \sigma_{X,Z}} & Y(ZX)
 \end{array}$$

五边形比较改变括号的次序, 三角形比较删去么元与改变括号的次序, 六边形比较整体交换与逐次交换. 这些条件使结构同构的不同使用方式彼此相容. 本讲所说的对称么半张量范畴, 就是把上述双函子 $\otimes$ 称为张量积的对称么半范畴.

命题 5.17 (模范畴的对称么半张量结构). 设 A 为交换含么环. 范畴 $A\text{-Mod}$ 以 $\otimes_A$ 为张量积、 A 为么元对象, 构成对称么半范畴. 对任意 A -模 M, N, P , 取 $m \in M, n \in N, p \in P, a \in A$. 其结合同构、单位同构与交换同构为

$$\begin{aligned}
 \alpha_{M,N,P} : (M \otimes_A N) \otimes_A P &\xrightarrow{\sim} M \otimes_A (N \otimes_A P), & (m \otimes n) \otimes p &\mapsto m \otimes (n \otimes p), \\
 \lambda_M : A \otimes_A M &\xrightarrow{\sim} M, & a \otimes m &\mapsto am, \\
 \rho_M : M \otimes_A A &\xrightarrow{\sim} M, & m \otimes a &\mapsto am, \\
 \sigma_{M,N} : M \otimes_A N &\xrightarrow{\sim} N \otimes_A M, & m \otimes n &\mapsto n \otimes m.
 \end{aligned}$$

证明. 张量积的双函子性. 本证明中所有模均为 A -模, 所有张量积均在 A 上取. 在对象上取 $(M, N) \mapsto M \otimes_A N$, 在态射上取 $(f : M \rightarrow M', g : N \rightarrow N') \mapsto f \otimes g : M \otimes_A N \rightarrow M' \otimes_A N'$. 命题 4.27 已证明 $f \otimes g$ 是良定义的模同态. 对 $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M''$ 与 $N \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{g'} N''$, 有 $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$, 因为两边都把 $m \otimes n$ 送到 $f'(f(m)) \otimes g'(g(n))$. 同样, $\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{M \otimes_A N}$. 这就验证了积范畴上的函子公理.

结构同构的自然性. 上述 α, λ, σ 已在命题 4.27 中构造; $\rho_M = \lambda_M \circ \sigma_{M,A}$, 其逆为 $m \mapsto m \otimes 1$. 设 $f: M \rightarrow M', g: N \rightarrow N', h: P \rightarrow P'$ 为模同态, 则

$$(f \otimes (g \otimes h)) \circ \alpha_{M,N,P} = \alpha_{M',N',P'} \circ ((f \otimes g) \otimes h),$$

因为两边都把 $(m \otimes n) \otimes p$ 送到 $f(m) \otimes (g(n) \otimes h(p))$. 同理, $(g \otimes f) \circ \sigma_{M,N} = \sigma_{M',N'} \circ (f \otimes g)$, 两边在 $m \otimes n$ 上的值均为 $g(n) \otimes f(m)$. 左、右单位同构的自然性分别是 $f \circ \lambda_M = \lambda_{M'} \circ (\text{id}_A \otimes f)$ 与 $f \circ \rho_M = \rho_{M'} \circ (f \otimes \text{id}_A)$, 均由 $f(am) = af(m)$ 得到.

相容条件. 逐层展开纯张量可知, 完全加括号的纯张量生成相应的迭代张量积, 所以只须在这些生成元上比较两个模同态. 以下取 A -模 L, M, N, P , 以及 $l \in L, m \in M, n \in N, p \in P$ 和 $a \in A$.

- (1) 五边形等式的两边, 都把 $((l \otimes m) \otimes n) \otimes p$ 送到 $l \otimes (m \otimes (n \otimes p))$.
- (2) 三角形等式的左边把 $(m \otimes a) \otimes n$ 送到 $m \otimes an$, 右边把它送到 $am \otimes n$. 两者由张量积的平衡关系相等.
- (3) 连续交换两次固定每个 $m \otimes n$, 故 $\sigma_{N,M} \circ \sigma_{M,N} = \text{id}_{M \otimes_A N}$.
- (4) 六边形等式的两边, 都把 $(m \otimes n) \otimes p$ 送到 $n \otimes (p \otimes m)$.

因此全部公理成立. 交换与么元的相容性在这里也可直接看出: $\lambda_M \circ \sigma_{M,A} = \rho_M$, 两边均把 $m \otimes a$ 送到 am . $\square$

么元对象 A 的含义是 $A \otimes_A M \simeq M \simeq M \otimes_A A$; 模范畴的始对象与终对象则是 0 . 当 $A \neq 0$ 时, 它们与么元对象不同. 同样, 结合同构给出 $(M \otimes_A N) \otimes_A P \simeq M \otimes_A (N \otimes_A P)$, 并不要求两边是同一个对象. 这里 A 的交换性保证左模之间的张量积仍为左 A -模, 且交换因子的公式良定义.

定义 5.18 (闭对称么半范畴). 设 $\mathcal{C}$ 为对称么半范畴. 若对每个对象 $N \in \mathcal{C}$, 函子 $- \otimes N: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 都有右伴随, 则称 $\mathcal{C}$ 为闭对称么半范畴 (*closed symmetric monoidal category*). 对对象 $P \in \mathcal{C}$, 这个右伴随在 P 上的值称为从 N 到 P 的内部 Hom 对象.

在 $A\text{-Mod}$ 中, 给定 A -模 N, P , 它就是模同态集合 $\text{Hom}_A(N, P)$, 配备逐点加法与数乘 $(ah)(n) = ah(n)$ ($a \in A, h \in \text{Hom}_A(N, P), n \in N$); 见第十讲命题 4.13. 本讲定理 5.14 给出 $(- \otimes_A N) \dashv \text{Hom}_A(N, -)$, 故模范畴还是闭对称么半范畴.

相应的取值映射 $\text{Hom}_A(N, P) \otimes_A N \rightarrow P, h \otimes n \mapsto h(n)$ 由双线性诱导, 并在伴随双射下对应于 $\text{Hom}_A(N, P)$ 的恒等映射.

在泛函分析中, 张量积还要反映拓扑. 固定标量域 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 在赋范 $\mathbb{F}$ -空间中, 我们通常只考虑有界 $\mathbb{F}$ -线性映射和连续 $\mathbb{F}$ -双线性映射; 代数张量积的泛性质则针对所有双线性映射. 若要让以 Banach 空间为目标的连续双线性映射对应于完备张量积上的连续线性映射, 还须选定适当的张量范数并取完备化. 不同的张量范数可能给出不同的完备张量积. 例 4.34 已经给出了必须取完备化的具体现象.

习题

- (1) 把二阶群 $C_2 = \{1, s\}$ 看成只有一个对象 $*$ 的范畴: 态射为群元素, 复合为群乘法. 令 $X = \{0, 1, 2\}$, 规定 $D(*) = X, D(1) = \text{id}_X$, 并令 $D(s)$ 交换 0, 1, 固定 2.
- (a) 证明这些规定给出函子 $D: C_2 \rightarrow \mathbf{Set}$. 计算 $\lim D, \text{colim } D$, 并写出它们的结构映射.
- (b) 对任意群 G , 同样把它看成单对象范畴. 设 $D: G \rightarrow \mathbf{Set}$ 为函子, 记 $X = D(*)$. 证明 $\lim D$ 是满足 $D(g)(x) = x$ 对所有 $g \in G$ 成立的元素 $x \in X$ 组成的集合; $\text{colim } D$ 是 X 对关系“存在 $g \in G$ 使 $y = D(g)(x)$ ”取商所得的集合. 说明后一个关系为何是等价关系, 并写出两个构造的结构映射.
- (2) 设指标范畴 I 只有三个对象 0, 1, 2, 非恒等态射只有 $1 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 2$. 定义函子 $D: I \rightarrow \mathbf{Set}$ 如下:

$$I: \begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \xrightarrow{D} X \xleftarrow{f} S \xrightarrow{g} Y$$

其中 $S = \{0, 1, 2\}, X = \{a, b\}, Y = \{c, d\}$, 映射取值为

s	0	1	2
$f(s)$	a	a	b
$g(s)$	c	d	d

- (a) 在 $X \amalg S \amalg Y$ 上, 逐一列出生成配对 $s \sim f(s), s \sim g(s) (s \in S)$, 并确定所生成等价关系的全部等价类: 哪些元素可以由这些配对经过有限步连接? 每一步允许正向或反向使用配对. 据此计算 $\text{colim } D$, 并写出三个结构映射.
- (b) 计算 $\lim D$, 并写出到 X, S, Y 的三个结构映射.
- (c) 只把 $g(1)$ 改为 c , 其余取值不变. 重新计算余极限及三个结构映射.

(3) * 设 I 为小范畴, S 为集合. 对 $i, j \in \text{Obj}(I)$, 令 $i \approx j$ 表示存在有限序列 $i = i_0, i_1, \dots, i_n = j$, 使每对相邻对象之间至少有一个方向的态射; 允许 $n = 0$.

(a) 证明 $\approx$ 是等价关系, 并记其商集为 $\pi_0(I)$.

(b) 令 $\Delta S : I \rightarrow \mathbf{Set}$ 把每个对象送到 S , 每个态射送到 id_S . 利用命题 5.1、5.2 证明

$$\lim \Delta S \cong S^{\pi_0(I)}, \quad \text{colim } \Delta S \cong \pi_0(I) \times S,$$

其中 $S^{\pi_0(I)}$ 是全部映射 $\pi_0(I) \rightarrow S$ 组成的集合. 写出这两个双射, 以及右端两个集合所对应的结构映射.

(c) 分别讨论 I 没有对象、 $S = \emptyset$, 以及两者同时发生时的结果.

(4) 取保么环同态 $f, g : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}[y]$, 对 $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 规定 $f(p(x)) = p(0)$ 、 $g(p(x)) = p(2)$, 将右端看作 $\mathbb{Z}[y]$ 中的常数多项式.

(a) 求全部差 $f(p) - g(p)$ 在 $\mathbb{Z}[y]$ 中生成的加法子群与理想. 计算 f, g 在 $\mathbf{CRing}$ 中的余等化子.

(b) 设 R, S 为交换含么环, $f, g : R \rightarrow S$ 为保么环同态. 若存在 $r_0 \in R$ 使 $f(r_0) - g(r_0)$ 是 S 的单位, 证明 f, g 在 $\mathbf{CRing}$ 中的余等化子为 $S \rightarrow 0$.

(c) 在 (b) 的假设下, 若 $R, S \neq 0$, 证明 f, g 在非零交换含么环及保么环同态组成的范畴中没有余等化子.

(5) 设 X, Y, Z 为集合, $f : X \rightarrow Z, g : Y \rightarrow Z$ 为映射. 记 $P = X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$, 称为这两个映射的纤维积; 定义第一投影 $p_X : P \rightarrow X$ 、 $p_X(x, y) = x$.

(a) 对每个 $x_0 \in X$, 写出 $p_X^{-1}(\{x_0\})$ 与集合 $\{y \in Y : g(y) = f(x_0)\}$ 之间的双射及其逆; 这里 $p_X^{-1}(\{x_0\}) = \{(x, y) \in P : x = x_0\}$.

(b) 据此证明: 若 g 为单射, 则 p_X 为单射; 若 g 为满射, 则 p_X 为满射.

(c) 选取一个具体的映射 $f : X \rightarrow Z$, 再分别构造映射 $g : Y \rightarrow Z$, 使 p_X 为单射而 g 不为单射, 以及 p_X 为满射而 g 不为满射.

(6) 设 A 为交换含么环, $F : \mathbf{Set} \rightarrow A\text{-Mod}$ 为自由模函子.

(a) 取 $S = \{a, b, c\}$ 、 $T = \{u, v\}$, 定义 $r : S \rightarrow T$, 使 $r(a) = r(b) = u$ 、 $r(c) = v$. 按 $([a], [b], [c])$ 与 $([u], [v])$ 的顺序排列标准生成元, 写出同态 $F(r) : F(S) \rightarrow F(T)$ 的矩阵, 求其核与像.

(b) 设 $r : S \rightarrow T$ 为任意集合满射. 证明 $F(r)$ 为满同态, 且其核由所有满足 $r(s) = r(s')$ 的差 $[s] - [s']$ 生成. 提示: 对核中的一个元素, 只需处理其有限支撑内的元素.

- (7) 设 A 为交换含么环, F 与 U 分别为自由模函子与遗忘函子, S 为集合, M 为 A -模. 沿用映射

$$\eta_S : S \rightarrow U(F(S)), \quad s \mapsto [s], \quad \varepsilon_M : F(U(M)) \rightarrow M, \quad [m] \mapsto m.$$

- (a) 写出 $F(\eta_S) : F(S) \rightarrow F(U(F(S)))$ 在标准生成元上的取值, 并验证

$$\varepsilon_{F(S)} \circ F(\eta_S) = \text{id}_{F(S)}, \quad U(\varepsilon_M) \circ \eta_{U(M)} = \text{id}_{U(M)}.$$

- (b) 取 $A = \mathbb{Z}, S = \{*\}$. 找出 $F(U(F(S)))$ 中一个元素, 使它在 $F(\eta_S) \circ \varepsilon_{F(S)}$ 下的像不等于自身.

- (8) 设 A 为交换含么环, r, s 为正整数. 记 $e_1, \dots, e_r \in A^r$ 与 $e'_1, \dots, e'_s \in A^s$ 为标准坐标向量: 相应坐标为 1, 其余坐标为 0. 给定矩阵 $(c_{ij}) \in \text{Mat}_{r \times s}(A)$.

- (a) 证明存在唯一的 A -模同态 $h : A^r \otimes_A A^s \rightarrow A$, 对所有 $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$ 满足 $h(e_i \otimes e'_j) = c_{ij}$. 对 $x = (x_1, \dots, x_r) \in A^r, y = (y_1, \dots, y_s) \in A^s$, 写出 $h(x \otimes y)$ 的公式.

- (b) 写出 h 在张量-Hom 伴随下对应的同态 $q : A^r \rightarrow \text{Hom}_A(A^s, A)$ 的公式. 当 $r = 2, s = 3$ 时, 分别写出 $q(e_1), q(e_2) : A^3 \rightarrow A$, 说明它们与矩阵两行的关系.

- (c) 从 (b) 中的同态 q , 怎样恢复 h 及原矩阵的各个系数 c_{ij} ?

- (9) 设 r, s, t 为正整数, 令 $M = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}, N = \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}, P = \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$, 并分别记 1 在 M, N 中的像为 $\bar{1}_M, \bar{1}_N$.

- (a) 证明映射 $h \mapsto h(\bar{1}_N)$ 给出双射

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, P) \xrightarrow{\sim} \{p \in P : sp = 0\},$$

并写出其逆.

- (b) 利用张量-Hom 伴随证明, 映射 $h \mapsto h(\bar{1}_M \otimes \bar{1}_N)$ 给出双射

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_{\mathbb{Z}} N, P) \xrightarrow{\sim} \{p \in P : rp = sp = 0\},$$

并写出其逆. 证明这个集合有 $\gcd(r, s, t)$ 个元素.

- (c) 当 $(r, s, t) = (4, 6, 8)$ 时, 列出 (b) 右端的全部元素.

- (10) 设 A 为交换含么环, M, N, N', P 为 A -模, $v: N \rightarrow N'$ 为模同态. 为区分两个固定模, 对 $L = N, N'$, 将张量-Hom 对应记为

$$\begin{aligned}\Phi_{M,P}^L: \operatorname{Hom}_A(M \otimes_A L, P) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_A(L, P)), \\ \Phi_{M,P}^L(h)(m)(\ell) &= h(m \otimes \ell).\end{aligned}$$

- (a) 对模同态 $h: M \otimes_A N' \rightarrow P$ 及元素 $m \in M, n \in N$, 验证

$$\Phi_{M,P}^N(h \circ (\operatorname{id}_M \otimes v))(m)(n) = \Phi_{M,P}^{N'}(h)(m)(v(n)).$$

- (b) 把 (a) 写成交换方块. 两个水平箭头分别为 $\Phi_{M,P}^{N'}$ 与 $\Phi_{M,P}^N$; 写出两个竖直箭头的源、靶及其作用公式.

- (11) 设 A 为交换含么环, $F: \mathbf{Set} \rightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$ 为自由模函子. 证明: 每个自然变换 $\theta: F \Rightarrow F$ 都由唯一的 $c \in A$ 给出, 公式为

$$\theta_S\left(\sum_{s \in S} a_s[s]\right) = \sum_{s \in S} c a_s[s]$$

(S 为任意集合, 和式具有有限支撑); 反之, 每个 $c \in A$ 都按此公式给出自然变换. 哪些 c 给出自然同构? 提示: 先考察单点集, 再使用把单点送到 $s \in S$ 的映射.

- (12) 沿用通常的嵌入 $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$. 对实向量空间 M , 复化 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} M$ 的复数乘法作用在第一个因子上.

- (a) 给定 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, 令实线性映射 $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ 为 $v(x, y) = z_1 x + z_2 y$. 写出它在标量扩张与限制标量的伴随下对应的复线性映射 $\tilde{v}: \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ 在纯张量上的取值公式.
- (b) 把 $\mathbb{C}$ 看作实向量空间. 写出实线性恒等映射 $\operatorname{id}_{\mathbb{C}}$ 在同一伴随下对应的复线性映射 $\mu: \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 在纯张量上的取值公式. 证明 $1 \otimes 1, 1 \otimes i$ 构成其定义域的一组复基, 并求 $\ker \mu$.

- (13) 选读. 在 $\mathbf{Set}$ 中, 以笛卡尔积为张量积、单点集 $\{*\}$ 为么元对象; 在映射 $f: X \rightarrow X', g: Y \rightarrow Y'$ 上取积映射 $f \times g$.

- (a) 用有序对写出结合同构、左单位同构、右单位同构、交换同构及其逆. 证明这些同构自然, 并逐元素验证五边形、三角形、六边形与对称性条件.
- (b) 固定集合 X . 对集合 Y , 记 Y^X 为全部映射 $X \rightarrow Y$ 组成的集合; 对映射 $b: Y \rightarrow Y'$, 令 $b^X: Y^X \rightarrow (Y')^X$ 把 h 送到 $b \circ h$. 证明这些规定给出函子 $(-)^X: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$.

(c) 对集合 Z, Y , 构造下列双射及其逆

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Z \times X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Z, Y^X),$$

并验证其关于 Z, Y 的自然性. 据此证明 $(- \times X) \dashv (-)^X$, 从而 $\mathbf{Set}$ 是闭对称幺半范畴.

(14) 选读. 设 A 为交换含幺环. 对 A -模 M, N , 在 $M \oplus N$ 中按坐标作加法与数乘. 对模同态 $f: M \rightarrow M', g: N \rightarrow N'$, 令 $(f \oplus g)(m, n) = (f(m), g(n))$.

(a) 证明这些规定给出双函子 $\oplus: (A\text{-}\mathbf{Mod}) \times (A\text{-}\mathbf{Mod}) \rightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$. 以 0 为幺元对象, 用坐标写出各结构同构, 并验证对称幺半范畴的公理.

(b) 设 $A \neq 0, M$ 为 A -模. 比较 $\oplus$ 与 $\otimes_A$ 给出的两种幺半结构: 它们的幺元对象分别是什么? $M \oplus 0$ 与 $M \otimes_A 0$ 分别同构于什么模?

(c) 固定非零 A -模 N , 证明函子 $- \oplus N: A\text{-}\mathbf{Mod} \rightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$ 没有右伴随. 提示: 若右伴随为 R , 在伴随双射中取源对象为 0 、目标对象为 N , 比较 $\mathrm{Hom}_A(N, N)$ 与 $\mathrm{Hom}_A(0, R(N))$.

(15) 选读. 设 A 为交换含幺环, N, P 为 A -模. 在 $\mathrm{Hom}_A(N, P)$ 上取本讲所述的逐点加法与数乘.

(a) 证明映射 $(h, n) \mapsto h(n)$ 是 A -双线性的, 因而诱导模同态

$$\mathrm{ev}: \mathrm{Hom}_A(N, P) \otimes_A N \rightarrow P, \quad h \otimes n \mapsto h(n).$$

(b) 对任意 A -模 M 及模同态 $q: M \rightarrow \mathrm{Hom}_A(N, P)$, 证明它在张量- Hom 伴随下对应的同态为

$$M \otimes_A N \xrightarrow{q \otimes \mathrm{id}_N} \mathrm{Hom}_A(N, P) \otimes_A N \xrightarrow{\mathrm{ev}} P.$$

(c) 证明 $\mathrm{Hom}_A(A, P) \rightarrow P, h \mapsto h(1)$ 是关于 A -模 P 自然的模同构, 并写出其逆.

(16) 选读. 设 A 为交换含幺环, M, N 为 A -模. 沿用命题 5.17 的结合同构 α 、右单位同构 ρ 与交换同构 σ .

(a) 证明 $\sigma_{N, M} \circ \sigma_{M, N} = \mathrm{id}_{M \otimes_A N}$.

(b) 验证下式两边均为从 $(M \otimes_A A) \otimes_A N$ 到 $N \otimes_A M$ 的同态, 并证明它们相等:

$$\sigma_{M, N} \circ (\rho_M \otimes \mathrm{id}_N) = \rho_{N \otimes_A M} \circ \alpha_{N, M, A}^{-1} \circ \sigma_{M \otimes_A A, N}.$$

(c) 说明为什么 (a)、(b) 中的同态等式只需分别在形如 $m \otimes n$ 与 $(m \otimes a) \otimes n$ 的元素上验证, 其中 $m \in M, n \in N, a \in A$.