

5.2 第 14 讲 模的极限、余极限及伴随

本讲固定一个环 A . 未另作说明时, 模均指 A -模. 用作指标的范畴均为小范畴, 即其对象全体与态射全体均构成集合. 我们由直积和直和构造模范畴中的极限与余极限, 再用伴随关系解释 Hom 、张量积与完备化对极限和余极限的保持性质.

5.2.1 模的积、直和、等化子与余等化子

例 5.19 (模的直积与直和). 设 I 为集合, $(M_i)_{i \in I}$ 为一族 A -模.

(1) 直积 $\prod_{i \in I} M_i$. 在集合 $\prod_{i \in I} M_i$ 上, 按每个坐标定义加法与数乘, 即

$$(m_i) + (n_i) = (m_i + n_i), \quad a(m_i) = (am_i) \quad (a \in A).$$

模公理逐坐标成立, 故这些运算使 $\prod_{i \in I} M_i$ 成为 A -模, 称为 $(M_i)_{i \in I}$ 的直积.

对每个 $i \in I$, 坐标投影是模同态

$$p_i : \prod_{k \in I} M_k \rightarrow M_i, \quad (m_k)_{k \in I} \mapsto m_i.$$

对任意 A -模 T 及一族模同态 $f_i : T \rightarrow M_i (i \in I)$, 定义模同态

$$f : T \rightarrow \prod_{i \in I} M_i, \quad t \mapsto (f_i(t))_{i \in I}.$$

它满足 $p_i \circ f = f_i$. 这些等式逐一确定 $f(t)$ 的坐标, 因而 f 唯一. 这就验证了 $\prod_{i \in I} M_i$ 连同各坐标投影是 $(M_i)_{i \in I}$ 在 $A\text{-Mod}$ 中的积.

(2) 直和 $\bigoplus_{i \in I} M_i$. 直和 $\bigoplus_{i \in I} M_i$ 是上述直积中具有有限支撑的元素组成的子模, 即每个元素只有有限多个非零坐标. 它在模范畴中是余积. 记 $\iota_i : M_i \rightarrow \bigoplus_{k \in I} M_k$ 为把元素放在第 i 个坐标、其余坐标取零的模同态.

对任意 A -模 T 及一族模同态 $g_i : M_i \rightarrow T (i \in I)$, 定义模同态

$$g : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow T, \quad (m_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} g_i(m_i).$$

有限支撑保证右侧的和有意义. 它满足 $g \circ \iota_i = g_i$; 每个直和元素都是有限和 $\sum_{i \in I} \iota_i(m_i)$, 所以这些等式唯一确定 g . 因此 $\bigoplus_{i \in I} M_i$ 连同各坐标嵌入是 $(M_i)_{i \in I}$ 在 $A\text{-Mod}$ 中的余积.

当 I 为有限集时, 直积与直和是同一个模, 但分别配备投影与嵌入. 当 $I = \emptyset$ 时, 两者都是零模, 分别给出终对象与始对象.

把集合 I 看成只有恒等态射的范畴, 模族 $(M_i)_{i \in I}$ 便给出函子 $D : I \rightarrow A\text{-Mod}$, $D(i) = M_i$. 上述积与余积分别是 D 的极限与余极限, 即 $\lim D = \prod_{i \in I} M_i$ 与 $\text{colim } D = \bigoplus_{i \in I} M_i$. 当 $I = \{0, 1\}$ 时, 指标范畴及函子像如下:

$$I : \begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ 0 & & 1 \end{array} \xrightarrow{D} \begin{array}{cc} M_0 & M_1 \end{array}$$

例 5.20 (无限积与无限直和). 取 $A = \mathbb{Z}$. 在 $\prod_{n \geq 1} \mathbb{Z}$ 中, 序列 $(1, 1, 1, \dots)$ 不属于 $\bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Z}$. 各项的恒等同态 $\text{id}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ 经直和的泛性质给出求和同态

$$\bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (a_n)_{n \geq 1} \mapsto \sum_{n \geq 1} a_n.$$

有限支撑保证右侧是有限和; 对积中的 $(1, 1, 1, \dots)$, 这一公式没有整数值.

设 M, N 为 A -模, $f, g : M \rightarrow N$ 为模同态. 对于等化子与余等化子, 指标范畴 I 有两个对象及两个平行的非恒等态射. 令 $D : I \rightarrow A\text{-Mod}$ 把对象 $0, 1$ 分别送到 M, N , 把态射 u, v 分别送到 f, g , 如下图:

$$I : \begin{array}{ccc} & u & \\ \bullet & \rightrightarrows & \bullet \\ & v & \\ 0 & & 1 \end{array} \xrightarrow{D} \begin{array}{ccc} & f & \\ M & \rightrightarrows & N \\ & g & \end{array}$$

命题 5.21 ($A\text{-Mod}$ 中的等化子与余等化子). 设 M, N 为 A -模, $f, g : M \rightarrow N$ 为模同态. 包含映射与商映射

$$\ker(f - g) \hookrightarrow M, \quad N \twoheadrightarrow N / \text{im}(f - g)$$

分别是 f, g 的等化子和余等化子.

证明. 差 $f - g$ 是模同态, 故 $\ker(f - g)$ 是 M 的子模, $\text{im}(f - g)$ 是 N 的子模.

- (1) f, g 的等化子. 记包含映射为 $e : \ker(f - g) \rightarrow M$, 则 $f \circ e = g \circ e$. 设 T 为 A -模, 模同态 $h : T \rightarrow M$ 满足 $f \circ h = g \circ h$, 则 $(f - g)(h(t)) = 0$ 对每个 $t \in T$ 成立. 因此 h 的像落在 $\ker(f - g)$ 中, 限制目标便得到模同态 $\bar{h} : T \rightarrow \ker(f - g)$, 且 $e \circ \bar{h} = h$. 因为 e 单射, 这样的 $\bar{h}$ 唯一.
- (2) f, g 的余等化子. 记商映射为 $q : N \rightarrow N / \text{im}(f - g)$. 对每个 $m \in M$, 差 $f(m) - g(m)$ 属于 $\text{im}(f - g)$, 故 $q \circ f = q \circ g$. 设 T 为 A -模, 模同态 $k : N \rightarrow T$ 满足 $k \circ f = k \circ g$, 则 $k(f(m) - g(m)) = 0$, 所以 $\text{im}(f - g) \subseteq \ker k$. 于是公式 $\bar{k}(n + \text{im}(f - g)) = k(n)$ 与代表元的选择无关, 给出模同态 $\bar{k} : N / \text{im}(f - g) \rightarrow T$,

满足 $\bar{k} \circ q = k$. 因为 q 满射, 这样的 $\bar{k}$ 唯一. $\square$

对模同态 $u : M \rightarrow N$, 取 $f = u, g = 0$, 便得到它的核 $\ker u$ 与余核 $\operatorname{coker}(u) = N / \operatorname{im} u$.

例 5.22 (整数乘法的等化子与余等化子). 取 $A = \mathbb{Z}$, 令 $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ 为模同态, $f(n) = 2n, g(n) = 5n$. 因 $(f - g)(n) = -3n$, 等化子是 $0 \rightarrow \mathbb{Z}$, 余等化子是 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. 设 H 为 $\mathbb{Z}$ -模, $k : \mathbb{Z} \rightarrow H$ 为模同态. 由于 $k(n) = nk(1)$, 条件 $k \circ f = k \circ g$ 等价于 $3k(1) = 0$. 若此条件成立, 则 $\bar{k} : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow H, \bar{k}(\bar{n}) = nk(1)$ 与整数代表元无关: $n - n' = 3r$ 蕴含 $(n - n')k(1) = 0$. 它是唯一满足 $\bar{k}(\bar{n}) = k(n)$ 的模同态.

例 5.23 (两个坐标投影). 取模同态 $f, g : A^2 \rightarrow A, f(x, y) = x, g(x, y) = y$.

(1) f, g 的等化子. 等式 $f(x, y) = g(x, y)$ 就是 $x = y$, 故等化子为对角子模的包含映射 $\{(a, a) : a \in A\} \hookrightarrow A^2$. 此子模与 A 经 $(a, a) \mapsto a$ 同构, 故也可用 $A \rightarrow A^2, a \mapsto (a, a)$ 表示等化子.

(2) f, g 的余等化子. 因 $(f - g)(a, 0) = a$, 差映射满射, 余等化子为 $A \rightarrow 0$.

5.2.2 模的一般极限与余极限

模范畴中的极限是直积的子模, 余极限是直和的商模. 下面分别给出这两个构造, 并验证它们的泛性质.

命题 5.24 (极限的逐坐标构造). 设 I 为小范畴, $D : I \rightarrow A\text{-Mod}$ 为函子. 则 D 的极限是直积模中的子模

$$\lim D = \left\{ (m_i)_{i \in \operatorname{Obj}(I)} \in \prod_{i \in \operatorname{Obj}(I)} D(i) : D(\alpha)(m_i) = m_j \text{ 对每个 } \alpha : i \rightarrow j \right\},$$

结构态射为坐标投影 $p_i : \lim D \rightarrow D(i), (m_k)_k \mapsto m_i$. 当 I 为空范畴时, 所得对象为零模.

证明. 每个 $D(\alpha)$ 都保持加法与数乘, 故所列等式的解集包含零元, 并对逐坐标加法与数乘封闭, 因此是直积模的子模.

设 T 为 A -模, 带有一族模同态 $h_i : T \rightarrow D(i) (i \in \operatorname{Obj}(I))$, 满足 $D(\alpha) \circ h_i = h_j$ 对每个态射 $\alpha : i \rightarrow j$ 成立. 公式 $h(t) = (h_i(t))_i$ 定义了从 T 到上述子模的模同态, 满足 $p_i \circ h = h_i$, 而这些等式唯一确定了 h 的每个坐标. 这就验证了极限的泛性质. 当 I 为空范畴时, 零模为终对象, 结论仍成立. $\square$

命题 5.25 (模的余极限). 设 I 为小范畴, $D : I \rightarrow A\text{-Mod}$ 为函子. 令 $P = \bigoplus_{i \in \operatorname{Obj}(I)} D(i)$, 记 $e_i : D(i) \rightarrow P$ 为第 i 个坐标的嵌入. 在 P 中, 取由所有差

$e_j(D(\alpha)(m)) - e_i(m)$ 生成的子模 N , 其中 $\alpha : i \rightarrow j$ 遍历 I 的态射, $m \in D(i)$. 则 $\text{colim } D = P/N$. 若 $q : P \rightarrow P/N$ 为商同态, 则结构态射为 $q \circ e_i : D(i) \rightarrow P/N$.

证明. 由 N 的定义, $(q \circ e_j) \circ D(\alpha) = q \circ e_i$ 对每个态射 $\alpha : i \rightarrow j$ 成立. 设 T 为 A -模, 模同态族 $h_i : D(i) \rightarrow T$ 满足 $h_j \circ D(\alpha) = h_i$. 直和的泛性质给出唯一模同态 $h : P \rightarrow T$, 满足 $h \circ e_i = h_i$. 对 N 的每个生成元, 有

$$h(e_j(D(\alpha)(m)) - e_i(m)) = h_j(D(\alpha)(m)) - h_i(m) = 0,$$

故 $N \subseteq \ker h$. 因此 $\bar{h} : P/N \rightarrow T, p + N \mapsto h(p)$ 是良定义的模同态, 且 $\bar{h} \circ q \circ e_i = h_i$. 这些等式先唯一确定复合 $\bar{h} \circ q = h$, 再由 q 满射唯一确定 $\bar{h}$. 这正是余极限的泛性质. $\square$

对从同一对象出发的两条态射取余极限, 便得到与纤维积对偶的推出.

定义 5.26 (推出). 设 $\mathcal{C}$ 为范畴, X, Y, Z 为其中的对象, $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Z$ 为态射. 令 I 为只有下图所示非恒等态射的三对象范畴, $D : I \rightarrow \mathcal{C}$ 为图中指定的函子:

$$I : \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad \quad 1 \quad 2 \end{array} \xrightarrow{D} \begin{array}{c} Y \\ \swarrow \quad \searrow \\ X \quad \quad Z \end{array}$$

函子 D 的余极限称为 f, g 的推出 (pushout). 具体地, 它是对象 $P \in \mathcal{C}$ 及态射 $i : Y \rightarrow P, j : Z \rightarrow P$, 满足 $i \circ f = j \circ g$, 并且对任意对象 $T \in \mathcal{C}$ 及态射 $a : Y \rightarrow T, b : Z \rightarrow T$, 只要 $a \circ f = b \circ g$, 就存在唯一 $h : P \rightarrow T$, 使 $h \circ i = a, h \circ j = b$.

例 5.27 (模的推出). 设 L, M, N 为 A -模, $f : L \rightarrow M, g : L \rightarrow N$ 为模同态. 令 $(f, -g) : L \rightarrow M \oplus N$ 把 l 送到 $(f(l), -g(l))$. 则 f, g 的推出为 $(M \oplus N) / \text{im}(f, -g)$, 结构同态分别把 $m \in M, n \in N$ 送到 $(m, 0), (0, n)$ 的类. 对每个 $l \in L, (f(l), 0) - (0, g(l)) = (f(l), -g(l))$ 的类为零, 所以 $f(l)$ 与 $g(l)$ 在该商模中的像相等. 设 T 为 A -模. 若模同态 $a : M \rightarrow T, b : N \rightarrow T$ 满足 $af = bg$, 则模同态 $(m, n) \mapsto a(m) + b(n)$ 在 $\text{im}(f, -g)$ 上为零, 因而唯一诱导从该商模到 T 的同态, 其与两个结构同态的复合正是 a, b . 这就验证了推出的泛性质.

5.2.3 由余等化子构造张量积

张量积由双线性关系定义. 将这些关系写成两条同态取值相等的条件, 便可把张量积构造成余等化子.

构造. 设 M, N 为 A -模, F 为自由 A -模函子. 对集合 S , $F(S)$ 的标准基记为 $([s])_{s \in S}$; 对模 M , $F(M)$ 表示以其底层集合为基的自由模. 记 $\varepsilon_M : F(M) \rightarrow M$ 为满足 $\varepsilon_M([m]) = m (m \in M)$ 的模同态, 并同样定义 ε_N . 它们是自由模与遗忘函子伴随的余单位. 对 $s = \sum_{m \in M} a_m [m] \in F(M)$, $t = \sum_{n \in N} b_n [n] \in F(N)$, 其中两族系数均在 A 中取值且具有有限支撑, 在基元素上规定

$$\begin{aligned}\alpha, \beta : F(F(M) \times F(N)) &\rightrightarrows F(M \times N), \\ \alpha([(s, t)]) &= [(\varepsilon_M(s), \varepsilon_N(t))], \\ \beta([(s, t)]) &= \sum_{m \in M, n \in N} a_m b_n [(m, n)].\end{aligned}$$

这些取值唯一确定模同态 α, β . α 先算出两项线性组合, 再取对应的基元素; β 则把各对 (m, n) 对应的基元素按系数 $a_m b_n$ 相加.

命题 5.28 (张量积的余等化子构造). 取上述同态 α, β , 令 $C = F(M \times N) / \text{im}(\alpha - \beta)$, $q : F(M \times N) \rightarrow C$ 为商同态. 则映射 $\tau : M \times N \rightarrow C, \tau(m, n) = q([(m, n)])$ 双线性, 且满足张量积的泛性质. 因此 $C \simeq M \otimes_A N$, 该同构把 $q([(m, n)])$ 送到 $m \otimes n$.

证明. 由命题 5.21, q 是 α, β 的余等化子, 故 $q \circ \alpha = q \circ \beta$.

双线性. 取 $m, m' \in M, n, n' \in N$ 及 $a \in A$. 先取 $s = [m] + [m'], t = [n]$. 此时

$$\alpha([(s, t)]) = [(m + m', n)], \quad \beta([(s, t)]) = [(m, n)] + [(m', n)].$$

再对 $(s, t) = (a[m], [n])$ 使用 $q\alpha = q\beta$, 就得到

$$\begin{aligned}\tau(m + m', n) &= \tau(m, n) + \tau(m', n), \\ \tau(am, n) &= a\tau(m, n).\end{aligned}$$

同理, 取 $(s, t) = ([m], [n] + [n'])$ 和 $([m], a[n])$, 得到 $\tau(m, n + n') = \tau(m, n) + \tau(m, n')$ 及 $\tau(m, an) = a\tau(m, n)$. 因而 τ 双线性.

分解的存在性. 设 P 为任意 A -模, $b : M \times N \rightarrow P$ 为双线性映射. 自由模的泛性质给出唯一的模同态 $\tilde{b} : F(M \times N) \rightarrow P$, 满足 $\tilde{b}([(m, n)]) = b(m, n)$. 对任意上述 s, t , 双线性给出

$$\begin{aligned}(\tilde{b} \circ \alpha)([(s, t)]) &= b\left(\sum_{m \in M} a_m m, \sum_{n \in N} b_n n\right) \\ &= \sum_{m \in M, n \in N} a_m b_n b(m, n) = (\tilde{b} \circ \beta)([(s, t)]).\end{aligned}$$

两边在所有生成元上相同, 故 $\tilde{b} \circ \alpha = \tilde{b} \circ \beta$. 余等化子的泛性质给出唯一模同态 $\bar{b} : C \rightarrow P$, 使 $\bar{b} \circ q = \tilde{b}$, 从而 $\bar{b} \circ \tau = b$.

分解的唯一性. 若另有模同态 $h: C \rightarrow P$ 满足 $h \circ \tau = b$, 则 $h \circ q$ 在每个 $[(m, n)]$ 处都与 $\tilde{b}$ 相同, 故 $h \circ q = \tilde{b}$. 由 q 满射, 得到 $h = \bar{b}$. $\square$

例 5.29 (互素阶循环群的张量积). 第十一讲例 4.30 已算出 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = 0$. 在命题 5.28 中取 $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. 分别取 $(s, t) = (2[\bar{1}], [\bar{1}])$ 与 $([\bar{1}], 3[\bar{1}])$, 就使生成元 $e = q([\bar{1}, \bar{1}])$ 满足 $2e = 3e = 0$. 双线性使每个生成元的像都是 e 的整数倍. 因 $e = 3e - 2e = 0$, 商模 C 为零.

例 5.30 (二阶循环群与自身的张量积). 在命题 5.28 中取 $A = \mathbb{Z}$, $M = N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 商模 C 由 $e = q([\bar{1}, \bar{1}])$ 生成, 且 $2e = 0$. 乘法 $(\bar{r}, \bar{s}) \mapsto \bar{r}\bar{s}$ 双线性, 故按刚证明的分解性质诱导 $C \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 将 e 送到 $\bar{1}$. 因此 $e \neq 0$, 且 $C \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 与第十一讲例 4.30 的计算一致.

5.2.4 正向极限与逆向极限

设 M 为 A -模, $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots$ 为它的递增子模列. 包含同态 $M_n \rightarrow M_{n+1}$ 沿指标增大的方向; 删去末坐标的同态 $A^{n+1} \rightarrow A^n$ ($n \geq 1$) 则沿指标减小的方向. 这两类例子分别引出正向系与逆向系.

定义 5.31 (正向系与逆向系). 设 I 为非空偏序集. 称 I 为有向集 (directed set), 若任意 $i, j \in I$ 都有共同上界 $k \geq i, j$. 把 I 看成范畴: $i \leq j$ 时有唯一态射 $i \rightarrow j$. 以下设 I 为有向集, $\mathcal{C}$ 为范畴. 函子 $D: I \rightarrow \mathcal{C}$ 称为正向系; 若其余极限存在, 则称为正向极限 (direct limit, 也称归纳极限), 记为 $\varinjlim_{i \in I} D(i)$. 具体地, 对 $i \leq j$, 记相应的过渡态射为 $u_{ij}: D(i) \rightarrow D(j)$. 它们满足 $u_{ii} = \text{id}_{D(i)}$, 以及 $u_{jk} \circ u_{ij} = u_{ik}$ ($i \leq j \leq k$).

函子 $E: I^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ 称为逆向系; 若其极限存在, 则称为逆向极限 (inverse limit, 也称投射极限), 记为 $\varprojlim_{i \in I} E(i)$. 此时 $i \leq j$ 对应过渡态射 $p_{ij}: E(j) \rightarrow E(i)$, 满足 $p_{ii} = \text{id}_{E(i)}$, $p_{ij} \circ p_{jk} = p_{ik}$ ($i \leq j \leq k$).

当 $I = \mathbb{N}_0$ 时, 两个方向的指标范畴及函子像如下. 图中省略恒等态射及所画箭头的复合:

$$\begin{array}{c} I: \begin{array}{ccccccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \cdots \\ 0 & & 1 & & 2 & & \end{array} \xrightarrow{D} D(0) \xrightarrow{u_{01}} D(1) \xrightarrow{u_{12}} D(2) \longrightarrow \cdots \\ \\ I^{\text{op}}: \begin{array}{ccccccc} \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \cdots \\ 0 & & 1 & & 2 & & \end{array} \xrightarrow{E} E(0) \xleftarrow{p_{01}} E(1) \xleftarrow{p_{12}} E(2) \longleftarrow \cdots \end{array}$$

〔旁注〕 模的正向极限中的元素与相等判据

设 (M_i, u_{ij}) 是有向集 I 上的模正向系. 其正向极限中的每个元素都可写成

$[i, m]$, 即 $m \in M_i$ 在结构同态下的像. 对 $i, j \in I, m \in M_i, n \in M_j$, 有

$$[i, m] = [j, n] \iff \text{存在 } k \geq i, j \text{ 使 } u_{ik}(m) = u_{jk}(n).$$

特别地, $[i, m] = 0$ 当且仅当存在 $k \geq i$, 使 $u_{ik}(m) = 0$.

这些结论可直接从命题 5.25 的商模构造看出. 直和中的元素只有有限个非零坐标, 取这些坐标指标的共同上界 k , 将各坐标经相应过渡同态送入 M_k 并相加, 就得到单个代表元. 若两个代表元在商模中相等, 其差是有限多个生成关系的线性组合; 取所涉及全部指标的共同上界 k , 每个生成关系在 M_k 中的像都为零, 因而两代表元在 M_k 中的像相等. 反之, 若两个代表元在某个共同上界对应的模中有相同的像, 则过渡同态给出的关系使它们在商模中相等. 选读部分的命题 5.56 将这一判据推广到滤过范畴.

例 5.32 (有向并: 从有限生成部分恢复整个模). 设 M 为 A -模, I 为有向集. 设 $(M_i)_{i \in I}$ 是 M 的子模族, 且 $i \leq j$ 时 $M_i \subseteq M_j$. 则 $\bigcup_{i \in I} M_i$ 是 M 的子模: 任意两个元素落在某个共同的 M_k 中, 可在其中相加. 包含映射给出 $\varinjlim_{i \in I} M_i \simeq \bigcup_{i \in I} M_i$. 事实上, 设 N 为 A -模, 给定模同态 $h_i: M_i \rightarrow N$, 满足 $i \leq j$ 时 $h_j|_{M_i} = h_i$. 对 $m \in M_i$ 规定 $h(m) = h_i(m)$. 若 m 同时属于两项, 取共同上界, 由相容性可知此定义无关选择. 将有限多个元素放入同一项, 可知 h 保持加法与数乘; 各 M_i 覆盖这个并, 故 h 唯一.

模 M 的有限生成子模按包含关系组成有向集: 若 $M_1, M_2 \subseteq M$ 有限生成, 则 $M_1 + M_2$ 仍有限生成, 且包含 M_1, M_2 . 每个 $m \in M$ 都属于循环子模 Am , 所以 M 是其有限生成子模的正向极限.

例 5.33 (通过正向极限引入分母). 固定整数 $d \geq 2$. 在 $\mathbb{Z}\text{-Mod}$ 中考虑 $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times d} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times d} \dots$; 各项从第 0 项开始编号, 均为 $\mathbb{Z}$, 过渡同态为乘法同态 $\times d$.

对 $n \geq 0$, 令 $d^{-n}\mathbb{Z} = \{a/d^n : a \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}$. 第 n 项与这个加法子群之间有同构 $a \mapsto a/d^n$. 由于 $(da)/d^{n+1} = a/d^n$, 这些同构把原来的过渡同态变成包含映射, 即把原正向系化为

$$\mathbb{Z} \subseteq d^{-1}\mathbb{Z} \subseteq d^{-2}\mathbb{Z} \subseteq \dots$$

由例 5.32, 其正向极限就是这些子群的并, 记为 $\mathbb{Z}[1/d] = \{a/d^n : a \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$, 第 n 项的结构同态为 $a \mapsto a/d^n$. 随着 n 增大, 可用的分母依次为 $1, d, d^2, \dots$. 例如 $d = 2$ 时, 所得群包含 $1/2, 1/4, 3/8$, 但不包含 $1/3$.

例 5.34 (序列由相容的有限坐标确定). 对每个整数 $n \geq 1$, 取自由模 A^n , 以删去末坐标的模同态 $p_n: A^{n+1} \rightarrow A^n$ 为过渡同态, 得到逆向系 $\dots \rightarrow A^3 \rightarrow A^2 \rightarrow A$. 令 $A^{\mathbb{N}_{>0}}$ 表示所有取值于 A 的序列 $(a_1, a_2, \dots)$ 组成的模, 运算逐坐标进行. 则前 n 个坐标的投影给出同构

$$A^{\mathbb{N}_{>0}} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \geq 1} A^n, \quad (a_1, a_2, \dots) \mapsto ((a_1, \dots, a_n))_{n \geq 1}.$$

事实上,由命题 5.24,右侧由满足 $p_n(v_{n+1}) = v_n (n \geq 1)$ 的序列 $(v_n)_{n \geq 1} \in \prod_{n \geq 1} A^n$ 组成. 相容性说明第 j 个坐标从第 j 项起保持不变,因而唯一确定一个序列. 这与前述映射互逆,并保持加法与数乘,故给出所述模同构. 相对地,末尾添零的同态给出正向系 $A \rightarrow A^2 \rightarrow \dots$. 由例 5.32,其正向极限是有限支撑序列组成的直和 $\bigoplus_{n \geq 1} A$.

5.2.5 伴随函子保持极限和余极限

第十三讲的伴随关系还有一个用途:判断函子是否保持极限或余极限. 本节中的范畴均为局部小范畴,即任意两个对象之间的态射全体均构成集合.

设 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 与 $E: I \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子. 若 F 把 $\lim E$ 及其结构态射送到 $F \circ E$ 的极限,便称 F 保持该极限;保持余极限的含义同理.

定理 5.38 (伴随函子的保持性). 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为局部小范畴, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子,且 $F \dashv G$. 则 F 保持所有存在的小余极限, G 保持所有存在的小极限. 具体地,对小范畴 I 及函子 $D: I \rightarrow \mathcal{C}, E: I \rightarrow \mathcal{D}$,只要 $\operatorname{colim} D$ 与 $\lim E$ 存在,就有自然同构

$$F(\operatorname{colim} D) \simeq \operatorname{colim}(F \circ D), \quad G(\lim E) \simeq \lim(G \circ E),$$

对每个 $i \in \operatorname{Obj}(I)$, 其结构态射分别是 $F(\iota_i)$ 和 $G(p_i)$, 其中 $\iota_i: D(i) \rightarrow \operatorname{colim} D$, $p_i: \lim E \rightarrow E(i)$ 是原结构态射.

证明见本讲选读部分(第 13 页).

取空指标范畴,便知左伴随保持始对象,右伴随保持终对象.¹

推论 5.39. 设 N 为 A -模. 则 $- \otimes_A N$ 保持所有小余极限, $\operatorname{Hom}_A(N, -)$ 保持所有小极限. 若 B 为环, $\varphi: A \rightarrow B$ 为环同态,则 $B \otimes_A -: A\text{-}\mathbf{Mod} \rightarrow B\text{-}\mathbf{Mod}$ 保持所有小余极限,限制标量函子 Res_A^B 保持所有小极限.

证明. 第十三讲的张量-Hom 伴随定理 5.14 与标量扩张伴随命题 5.13 给出

$$(- \otimes_A N) \dashv \operatorname{Hom}_A(N, -), \quad (B \otimes_A -) \dashv \operatorname{Res}_A^B.$$

应用定理 5.38 即得结论. □

¹参见 The Stacks Project, Lemma 4.24.5(Tag 0038).

5.2.6 由保持性得到的具体计算

例 5.40 (自由模把不交并变成直和). 设 $F : \mathbf{Set} \rightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$ 为第十三讲的自由模函子. 由 $F \dashv U$, 其中 U 为遗忘函子, F 保持余积. 因此, 对指标集 I 及集合族 $(S_i)_{i \in I}$, 有

$$F\left(\coprod_{i \in I} S_i\right) \simeq \bigoplus_{i \in I} F(S_i).$$

把不交并中的元素记为 (i, s) , 其中 $s \in S_i$, 并记 $e_i : F(S_i) \rightarrow \bigoplus_{k \in I} F(S_k)$ 为直和嵌入. 上述同构由标准生成元上的取值 $[(i, s)] \mapsto e_i([s])$ 确定. 其逆由各模同态 $F(S_i) \rightarrow F(\coprod_{k \in I} S_k)$ 、 $[s] \mapsto [(i, s)]$ 经直和的泛性质得到. 两个复合都固定标准生成元, 故互为逆. 当 $I = \emptyset$ 时, 等式为 $F(\emptyset) = 0$.

例 5.41 (自由模把集合的关系变成模的关系). 考虑集合映射 $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ 、 $f(n) = n$ 、 $g(n) = n + 2$. 由关系 $n \sim n + 2$ 生成的等价关系恰为奇偶相同, 故它们的余等化子是商映射 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 自由模函子 F 保持余等化子. 记 $e_n = [n] \in F(\mathbb{Z})$, 则 $F(f)(e_n) = e_n$ 、 $F(g)(e_n) = e_{n+2}$, 所以

$$F(\mathbb{Z}) / \langle e_n - e_{n+2} : n \in \mathbb{Z} \rangle_A \simeq F(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq A^2.$$

这里 $\langle \cdot \rangle_A$ 表示生成的子模. 同构把每个 e_{2n} 的像送到 $(1, 0)$, 每个 e_{2n+1} 的像送到 $(0, 1)$.

例 5.42 (Hom 保持积). 设 N 为 A -模, I 为指标集, $(P_i)_{i \in I}$ 为 A -模族. 记 $p_i : \prod_{j \in I} P_j \rightarrow P_i$ 为第 i 个投影. 由右伴随的保持性,

$$\mathrm{Hom}_A(N, \prod_{i \in I} P_i) \simeq \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(N, P_i), \quad h \mapsto (p_i \circ h)_i.$$

逆映射把一族同态 $h_i : N \rightarrow P_i (i \in I)$ 送到 $n \mapsto (h_i(n))_{i \in I} (n \in N)$.

例 5.43 (Hom 保持逆向极限). 设 N 为 A -模, I 为有向集, (P_i, u_{ij}) 为 A -模的逆向系, 其中 $u_{ij} : P_j \rightarrow P_i (i \leq j)$. 则 $(\mathrm{Hom}_A(N, P_i))_{i \in I}$ 以 $h \mapsto u_{ij} \circ h$ 为过渡同态组成逆向系. 右伴随的保持性给出

$$\mathrm{Hom}_A(N, \varprojlim_i P_i) \simeq \varprojlim_i \mathrm{Hom}_A(N, P_i).$$

记 $p_i : \varprojlim_i P_i \rightarrow P_i$ 为坐标投影, 该同构把 h 送到 $(p_i \circ h)_i$. 其逆把满足 $u_{ij} \circ h_j = h_i (i \leq j)$ 的模同态族 $(h_i : N \rightarrow P_i)_{i \in I}$ 送到 $n \mapsto (h_i(n))_i$. 上述等式保证该映射的像落在 $\varprojlim_i P_i$ 中.

例 5.44 (Hom 保持核). 设 N, P, Q 为 A -模, $u : P \rightarrow Q$ 为模同态. 核 $\ker u \subseteq P$ 是 u 与零同态 $P \rightarrow Q$ 的等化子, 所以 $\mathrm{Hom}_A(N, \ker u)$ 识别为下列后复合同态的核:

$$\mathrm{Hom}_A(N, u) : \mathrm{Hom}_A(N, P) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(N, Q), \quad h \mapsto u \circ h.$$

具体地, 对模同态 $h: N \rightarrow P, u \circ h = 0$ 恰好意味着 h 的像包含在 $\ker u$ 中.

例 5.45 (张量积保持直和). 设 N 为 A -模, I 为指标集, $(M_i)_{i \in I}$ 为 A -模族. 记 $e_i: M_i \rightarrow \bigoplus_{j \in I} M_j$ 为第 i 个直和嵌入. 直和是余积, 故张量积函子的保持性给出

$$(\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_A N \simeq \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_A N).$$

对 $i \in I, m \in M_i, n \in N$, 把第 i 个直和项中的 $m \otimes n$ 送到 $e_i(m) \otimes n$, 就给出从右到左的典范同构.

例 5.46 (张量积保持正向极限). 设 N 为 A -模, I 为有向集, (M_i, u_{ij}) 为 A -模正向系, 其中 $u_{ij}: M_i \rightarrow M_j (i \leq j)$. 逐项张量得到过渡同态 $u_{ij} \otimes \text{id}_N: M_i \otimes_A N \rightarrow M_j \otimes_A N$. 记两个正向极限的结构同态为

$$\iota_i: M_i \longrightarrow \varinjlim_{k \in I} M_k, \quad j_i: M_i \otimes_A N \longrightarrow \varinjlim_{k \in I} (M_k \otimes_A N).$$

由张量积函子保持余极限, 得到同构

$$\varinjlim_{i \in I} (M_i \otimes_A N) \xrightarrow{\sim} (\varinjlim_{i \in I} M_i) \otimes_A N, \quad j_i(m \otimes n) \mapsto \iota_i(m) \otimes n$$

($i \in I, m \in M_i, n \in N$). 例如, 固定整数 $d \geq 2$, 考虑例 5.33 中各项均为 $\mathbb{Z}$ 、过渡同态为乘 d 的正向系, 项数从 $n = 0$ 开始. 把它逐项张量 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, 经 $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ 识别后, 过渡同态全部为零. 每个元素经过一次过渡同态便变成零, 故这个正向系的余极限为零模. 因此 $\mathbb{Z}[1/d] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = 0$. 再取与 d 互素的整数 $c \geq 2$. 若改为张量 $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$, 则 $\bar{d}$ 在 $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ 中可逆, 过渡同态是乘 $\bar{d}$, 正向极限同构于 $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$: 第 n 项的结构映射为 $\bar{a} \mapsto \bar{d}^{-n}\bar{a}$.

设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为 A -模同态. 若 $\text{im} f = \ker g$, 则称这列同态在 Y 处正合(exact). 例如, $Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ 在 Z 处正合, 等价于 g 满射.

命题 5.47 (张量积的右正合性). 设 M', M, N 为 A -模, $u: M' \rightarrow M$ 为模同态, $q: M \rightarrow M/\text{im} u$ 为商同态. 则

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{u \otimes \text{id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{q \otimes \text{id}_N} (M/\text{im} u) \otimes_A N \longrightarrow 0$$

在 $M \otimes_A N$ 与 $(M/\text{im} u) \otimes_A N$ 处正合. 因而有自然同构

$$(M/\text{im} u) \otimes_A N \simeq (M \otimes_A N) / \text{im}(u \otimes \text{id}_N).$$

证明. 商同态 q 是 u 与零同态 $M' \rightarrow M$ 的余等化子. 函子 $- \otimes_A N$ 保持余等化子, 并把零同态送到零同态. 由命题 5.21, $q \otimes \text{id}_N$ 满射, 其核为 $\text{im}(u \otimes \text{id}_N)$. 这就是所述正合性, 商模的同构随之由第一同构定理得到. $\square$

例 5.48 (对商环取张量积). 设 $I \subseteq A$ 为理想, N 为 A -模. 回忆第十一讲, IN 是所有有限和 $\sum_{\nu=1}^r a_\nu n_\nu$ ($a_\nu \in I, n_\nu \in N$) 组成的子模. 在上一命题中取 $u: I \hookrightarrow A$, 并用 $A \otimes_A N \simeq N$, 便恢复推论 4.29 的公式

$$(A/I) \otimes_A N \simeq N/IN, \quad (a+I) \otimes n \mapsto an + IN.$$

映射 $I \otimes_A N \rightarrow N, a \otimes n \mapsto an$ 的像是 IN , 所以该同构也由张量积保持余核得到.

例 5.49 (两个有限循环群的张量积). 设 m, n 为正整数. 在上一例取 $A = \mathbb{Z}, I = m\mathbb{Z}, N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 就得到第十一讲例 4.30 的 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/\gcd(m, n)\mathbb{Z}$. 右正合性把这一张量积识别为 N/mN , 其中 $N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

例 5.50 (张量积不一定保持核). 回忆第十一讲例 4.31: 单射 $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作张量积后成为零映射. 原映射的核为零, 新映射的核却是整个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 因此, 左伴随 $-\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 虽保持余核, 却不保持这个核.

例 5.51 (Hom 不一定保持余核). 在 $\mathbb{Z}$ -模范畴中, 考虑右伴随 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, -): \mathbb{Z}\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$. 对 $\mathbb{Z}$ -模 P , 模同态 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow P$ 由 $\bar{1}$ 的像 $p \in P$ 决定, 此像须满足 $2p = 0$. 在 $P = \mathbb{Z}$ 中只有零元素满足该条件; 在 $P = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中每个元素都满足. 因此 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$, 而 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 将该 Hom 函子作用于商同态 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 得到 $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 不再满射. 原商同态是 $\times 2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ 的余核; 而这个乘法映射经 Hom 函子后变成 $0 \rightarrow 0$, 其余核为零. 因此它不保持 $\times 2$ 的余核.

5.2.7 赋范空间与 Banach 空间中的正向极限

固定标量域 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 以赋范 $\mathbb{F}$ -向量空间为对象、算子范数至多为 1 的 $\mathbb{F}$ -线性映射为态射, 组成范畴 $\mathbf{Norm}_1$. 这样的映射 $f: E \rightarrow E'$ 称为压缩线性映射, 即对每个 $x \in E$ 都有 $\|f(x)\| \leq \|x\|$. $\mathbf{Norm}_1$ 的完备对象及这些对象之间的全部压缩线性映射组成子范畴 $\mathbf{Ban}_1$. 对赋范 $\mathbb{F}$ -空间 E , 记 $\widehat{E}$ 为其完备化, 即包含 E 为稠密等距子空间的完备赋范空间, $\iota_E: E \rightarrow \widehat{E}$ 为典范嵌入.

命题 5.52 (完备化与包含函子的伴随). 完备化定义函子 $\widehat{(-)}: \mathbf{Norm}_1 \rightarrow \mathbf{Ban}_1$, 并且

$$\widehat{(-)} \dashv (\mathbf{Ban}_1 \hookrightarrow \mathbf{Norm}_1).$$

证明. 设 E 为赋范 $\mathbb{F}$ -空间. 对任意 Banach $\mathbb{F}$ -空间 B 及压缩线性映射 $f: E \rightarrow B$, 存在唯一压缩线性映射 $\hat{f}: \widehat{E} \rightarrow B$, 使 $\hat{f} \circ \iota_E = f$. 具体地, 若 $x \in \widehat{E}$ 由 E 中的 Cauchy 列 $(x_r)_{r \geq 1}$ 表示, 压缩性使 $(f(x_r))_{r \geq 1}$ 成为 Cauchy 列, B 的完备性保证其收敛. 定义 $\hat{f}(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} f(x_r)$. 若 $(x'_r)_{r \geq 1}$ 也表示 x , 则 $\|f(x_r) - f(x'_r)\| \leq \|x_r - x'_r\| \rightarrow 0$, 故定义与表示列无关. 在 f 的加法和数乘等式中取极限, 可知 $\hat{f}$ 线性; 又由 $\|f(x_r)\| \leq \|x_r\|$ 得 $\|\hat{f}(x)\| \leq \|x\|$. 因此 $\hat{f}$ 是压缩线性映射. 其唯一性来自 $\iota_E(E)$ 的稠密性及压缩线性映射

的连续性. 对压缩线性映射 $E \xrightarrow{u} E' \xrightarrow{v} E''$, 将 $\iota_{E'} \circ u$ 作上述延伸, 得到 $\hat{u} : \widehat{E} \rightarrow \widehat{E'}$. 延伸的唯一性保证 $\widehat{\text{id}_E} = \text{id}_{\widehat{E}}$, 以及 $\widehat{v \circ u} = \widehat{v} \circ \widehat{u}$, 故完备化是函子. 与 ι_E 复合给出双射

$$\text{Hom}_{\mathbf{Ban}_1}(\widehat{E}, B) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Norm}_1}(E, B).$$

设 E' 为赋范 $\mathbb{F}$ -空间, B' 为 Banach $\mathbb{F}$ -空间, $a : E' \rightarrow E, b : B \rightarrow B'$ 为压缩线性映射. 对任意压缩线性映射 $h : \widehat{E} \rightarrow B$, 由 $\hat{a} \circ \iota_{E'} = \iota_E \circ a$, 有

$$(b \circ h \circ \hat{a}) \circ \iota_{E'} = b \circ (h \circ \iota_E) \circ a.$$

这正是上述双射关于 E, B 的自然性, 故得到所述伴随. $\square$

例 5.53 (有限维空间的两种正向极限). 对每个整数 $n \geq 1$, 取 $E_n = \mathbb{F}^n$, 赋予范数 $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = (\sum_{j=1}^n |x_j|^2)^{1/2}$, 并以末尾添零的等距嵌入 $u_n : E_n \rightarrow E_{n+1}$ 作为过渡映射.

(1) 在 $\mathbf{Norm}_1$ 中取正向极限. 记 c_{00} 为所有只有有限多个非零坐标的序列 $(x_j)_{j \geq 1}$ ($x_j \in \mathbb{F}$) 组成的向量空间, 赋予范数 $\|(x_j)\|_2 = (\sum_{j \geq 1} |x_j|^2)^{1/2}$. 将 E_n 的向量继续添零, 得到结构嵌入 $e_n : E_n \rightarrow c_{00}$. 这些嵌入使 c_{00} 成为该正向系在 $\mathbf{Norm}_1$ 中的余极限: 对任意赋范 $\mathbb{F}$ -空间 V 及满足 $f_{n+1} \circ u_n = f_n$ 的压缩线性映射 $f_n : E_n \rightarrow V$ ($n \geq 1$), 对 $x \in E_n$ 规定 $f(e_n(x)) = f_n(x)$. 相容性保证定义不依赖于 n . c_{00} 中任意两个元素都属于某个共同的 $e_n(E_n)$, 故 f 保持加法与数乘; 并且 $\|f(e_n(x))\| \leq \|x\|_2 = \|e_n(x)\|_2$, 所以 f 是压缩线性映射. 各 $e_n(E_n)$ 覆盖 c_{00} , 故这样的 f 唯一.

(2) 在 $\mathbf{Ban}_1$ 中取正向极限. 记 ℓ^2 为所有满足 $\sum_{j \geq 1} |x_j|^2 < \infty$ 的序列 $(x_j)_{j \geq 1}$ ($x_j \in \mathbb{F}$) 组成的向量空间, 仍赋予上述范数. 各 E_n 已完备; 由完备化保持余极限, 只需证明 ℓ^2 是 c_{00} 的完备化. 先验证完备性. 取其中任意 Cauchy 列 $(x^{(r)})_{r \geq 1}$, 其中 $x^{(r)} = (x_j^{(r)})_{j \geq 1}$. 由 $|x_j^{(r)} - x_j^{(s)}| \leq \|x^{(r)} - x^{(s)}\|_2$, 每个坐标列在 $\mathbb{F}$ 中都有极限, 记为 x_j . 令 $x = (x_j)_{j \geq 1}$; 还须证明这个序列属于 ℓ^2 , 且原列在范数下收敛到它.

给定 $\varepsilon > 0$, 取整数 $R \geq 1$, 使任意 $r, s \geq R$ 都满足 $\|x^{(r)} - x^{(s)}\|_2 \leq \varepsilon$. 固定 $r \geq R$, 先对前 m 个坐标的平方和令 $s \rightarrow \infty$, 再令 $m \rightarrow \infty$, 得到

$$\sum_{j \geq 1} |x_j^{(r)} - x_j|^2 \leq \varepsilon^2.$$

先取 $\varepsilon = 1$ 并固定一个相应的 r , 该不等式表明 $x - x^{(r)} \in \ell^2$, 故 $x \in \ell^2$. 再对任意 $\varepsilon > 0$ 使用同一估计, 得到 $x^{(r)} \rightarrow x$, 证明 ℓ^2 完备.

每个平方可和序列又由其有限截断在此范数下逼近, 故 c_{00} 在 ℓ^2 中等距稠密, 连同刚证明的完备性, 得到 $\widehat{c_{00}} \simeq \ell^2$. 由完备化保持余极限, 以及 $\widehat{E_n} \simeq E_n$, 这个系在 $\mathbf{Ban}_1$ 中的正向极限为 ℓ^2 .

5.2.8 选读: 伴随函子保持性定理的证明

本节用 Hom 双射证明定理 5.38. 先由 Yoneda 引理说明 Hom 函子如何确定对象, 再将极限与余极限的泛性质写成 Hom 双射, 用后一描述完成保持性的证明.

定义 5.35 (Yoneda 嵌入). 设 $\mathcal{C}$ 为局部小范畴. 对对象 $X \in \mathcal{C}$, 函子 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ 把对象 T 送到 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$, 把态射 $a : T' \rightarrow T$ 送到前复合映射 $f \mapsto f \circ a$. 对态射 $u : X \rightarrow Y$, 后复合给出自然变换 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$, 它在对象 T 处的映射是 $f \mapsto u \circ f$. 这定义了函子

$$y_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}), \quad X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X),$$

称为 Yoneda 嵌入 (Yoneda embedding).

结合律给出 $(u \circ f) \circ a = u \circ (f \circ a)$, 故后复合确实给出自然变换; 后复合还保持恒等与复合, 故 $y_{\mathcal{C}}$ 是函子. 当 $\mathcal{C}$ 不是小范畴时, 上式的目标只需取由这些 Hom 函子及其自然变换构成的范畴; 下一引理保证任意两个这样的函子之间的自然变换全体构成集合.

引理 5.36 (Yoneda). 设 $\mathcal{C}$ 为局部小范畴, $X, Y \in \mathcal{C}$ 为对象. 每个自然变换 $\eta : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$ 都由唯一态射 $u : X \rightarrow Y$ 的后复合给出. 因此 $y_{\mathcal{C}}$ 是全忠实函子 (fully faithful functor), 即它在每对对象的态射集上诱导双射.

证明. 取 $u = \eta_X(\text{id}_X) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. 对任意对象 $T \in \mathcal{C}$ 及态射 $f : T \rightarrow X$, 把 f 视为 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中的态射 $f^{\text{op}} : X \rightarrow T$. 将自然性等式 (4.1) 用于 f^{op} , 得到交换方块

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) & \xrightarrow{\eta_X} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ - \circ f \downarrow & & \downarrow - \circ f \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) & \xrightarrow{\eta_T} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y) \end{array}$$

从左上角的 id_X 沿两条路径计算, 得到 $\eta_T(f) = u \circ f$. 因此 η 由 u 的后复合给出; 在 id_X 上取值便恢复 u , 故 u 唯一. $\square$

特别地, 若 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ 与 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$ 自然同构, 则该同构及其逆分别来自态射 $u : X \rightarrow Y$, $v : Y \rightarrow X$. 它们的复合诱导恒等自然变换, 由态射集之间上述映射的单射性, 得到 $v \circ u = \text{id}_X$, $u \circ v = \text{id}_Y$, 故 $X \simeq Y$. 对反范畴应用同一引理, 还可利用 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ 与 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -)$ 的自然同构识别 X, Y . 也就是说, 一个对象由它的 Hom 函子在同构意义下确定.²

²这是 Yoneda 引理的全忠实形式, 见 The Stacks Project, Lemma 4.3.5 (Tag 001P).

引理 5.37 (Hom 与极限、余极限). 设 $\mathcal{C}$ 为局部小范畴, I 为小范畴, $D: I \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子, $T \in \mathcal{C}$ 为对象.

(1) 若 $\lim D$ 存在, 记其结构态射为 $p_i: \lim D \rightarrow D(i)$. 则有关于 T 自然的双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \lim D) \simeq \lim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, D(i)), \quad h \mapsto (p_i \circ h)_i.$$

(2) 若 $\mathrm{colim} D$ 存在, 记其结构态射为 $\iota_i: D(i) \rightarrow \mathrm{colim} D$. 则有关于 T 自然的双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{colim} D, T) \simeq \lim_{i \in I^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D(i), T), \quad h \mapsto (h \circ \iota_i)_i.$$

右侧均为集合范畴中的极限. 反之, 若对象 X 配有态射 $p_i: X \rightarrow D(i)$, 满足 $D(\alpha) \circ p_i = p_j (\alpha: i \rightarrow j)$, 且它们诱导的映射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \rightarrow \lim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, D(i))$ 对每个 T 都是双射, 则 X 连同这些态射是 $\lim D$. 若对象 X 配有态射 $\iota_i: D(i) \rightarrow X$, 满足 $\iota_j \circ D(\alpha) = \iota_i (\alpha: i \rightarrow j)$, 且它们诱导的映射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T) \rightarrow \lim_{i \in I^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D(i), T)$ 对每个 T 都是双射, 则 X 连同这些态射是 $\mathrm{colim} D$.

证明. 第一项中, 态射 $\alpha: i \rightarrow j$ 通过后复合给出映射 $u \mapsto D(\alpha) \circ u$. 所以右侧的极限由满足 $D(\alpha) \circ u_i = u_j$ 的态射族 $u_i: T \rightarrow D(i)$ 组成, 极限的泛性质恰好给出所述双射.

第二项中, $\alpha: i \rightarrow j$ 通过前复合给出映射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D(j), T) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D(i), T)$, $v \mapsto v \circ D(\alpha)$, 故指标为 I^{op} . 其极限由满足 $v_j \circ D(\alpha) = v_i$ 的态射族 $v_i: D(i) \rightarrow T$ 组成, 余极限的泛性质给出第二项的双射.

第一项的双射与 $T' \rightarrow T$ 的前复合相容, 第二项的双射与 $T \rightarrow T'$ 的后复合相容, 故它们关于 T 自然. 反之, 双射的满射性给出相容态射族的分解, 单射性给出分解的唯一性, 正是相应的泛性质. $\square$

下面将伴随双射与这两个公式合用, 再由引理末尾的判据验证极限与余极限的泛性质.

定理 5.38 的证明. 设 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 与 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 满足 $F \dashv G$, 其中 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为局部小范畴. 取小范畴 I 及函子 $D: I \rightarrow \mathcal{C}$ 、 $E: I \rightarrow \mathcal{D}$, 并假设 $\mathrm{colim} D$ 与 $\lim E$ 存在. 记其结构态射分别为 $\iota_i: D(i) \rightarrow \mathrm{colim} D$ 与 $p_i: \lim E \rightarrow E(i)$. 记伴随双射为 $\Phi_{X,Y}: \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. 对任意对象 $Y \in \mathcal{D}$, 依次用伴随双射、引理 5.37 及伴随双射, 得到关于 Y 自然的双射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\mathrm{colim} D), Y) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{colim} D, G(Y)) \\ &\simeq \lim_{i \in I^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D(i), G(Y)) \\ &\simeq \lim_{i \in I^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(D(i)), Y). \end{aligned}$$

最后一步是对每个 i 使用 $\Phi_{D(i),Y}^{-1}$. 对 $\alpha : i \rightarrow j$ 与 $k : F(D(j)) \rightarrow Y$, 自然性给出

$$\Phi_{D(i),Y}(k \circ F(D(\alpha))) = \Phi_{D(j),Y}(k) \circ D(\alpha).$$

因此这些逐项双射确实把相容族送到相容族, 诱导集合极限之间的双射. 对 $h : F(\operatorname{colim} D) \rightarrow Y$, 同一自然性给出

$$\Phi_{\operatorname{colim} D, Y}(h) \circ \iota_i = \Phi_{D(i), Y}(h \circ F(\iota_i)).$$

上述复合双射把 h 送到相容族 $(h \circ F(\iota_i))_i$. 由引理的逆向判据, $F(\operatorname{colim} D)$ 连同 $F(\iota_i)$ 就是 $F \circ D$ 的余极限.

同样, 对任意对象 $X \in \mathcal{C}$, 有关于 X 自然的双射

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(\lim E)) &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), \lim E) \\ &\simeq \lim_{i \in I} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), E(i)) \\ &\simeq \lim_{i \in I} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(E(i))). \end{aligned}$$

把 $h : X \rightarrow G(\lim E)$ 先送到 $k = \Phi_{X, \lim E}^{-1}(h)$, 再取第 i 项 $p_i \circ k$. 第二变量的自然性给出 $\Phi_{X, E(i)}(p_i \circ k) = G(p_i) \circ h$. 因此复合正是 $h \mapsto (G(p_i) \circ h)_i$. 同一判据说明 $G(\lim E)$ 连同 $G(p_i)$ 满足极限的泛性质. $\square$

5.2.9 选读: 滤过范畴与滤过余极限

在有向系中, 有限多个指标总能放到一个共同上界之下. 将这一条件推广到一般范畴时, 除了寻找共同目标, 还须使平行态射在继续复合后相等.

定义 5.54 (滤过范畴). 设 I 为范畴. 称 I 为滤过的 (*filtered*), 若满足:

- (1) I 非空;
- (2) 对任意对象 $i, j \in I$, 存在对象 $k \in I$ 及态射 $i \rightarrow k, j \rightarrow k$;
- (3) 对任意 I 中的平行态射 $\alpha, \beta : i \rightarrow j$, 存在对象 $k \in I$ 及态射 $\gamma : j \rightarrow k$, 使 $\gamma \circ \alpha = \gamma \circ \beta$.

若 I 小且滤过, $D : I \rightarrow \mathcal{C}$ 为取值于范畴 $\mathcal{C}$ 的函子, 则 D 的余极限 (若存在) 称为滤过余极限, 仍记为 $\operatorname{colim} D$. 若 I^{op} 滤过, 则称 I 为余滤过范畴 (*cofiltered*).

有向集给出滤过范畴: 第二条就是共同上界条件, 第三条自动成立, 因为偏序范畴中两对象间至多有一个态射. 因此正向极限是滤过余极限的特例.

引理 5.55 (有限个对象与态射的共同目标). 设 I 为滤过范畴. 给定其中有限多个对象及它们之间有限多个指定的态射, 存在对象 $k \in I$ 及从每个给定对象 i 出发的态射 $v_i : i \rightarrow k$, 使每个指定态射 $\alpha : i \rightarrow j$ 都满足 $v_j \circ \alpha = v_i$.

证明. 反复使用定义 5.54 的第二条, 选取对象 k_0 及态射 $v_i : i \rightarrow k_0$, 其中 i 遍历给定的有限多个对象. 对第一个指定态射 $\alpha : i \rightarrow j$, 比较两个 $i \rightarrow k_0$ 的态射 $v_i, v_j \circ \alpha$. 第三条给出 $k_0 \rightarrow k_1$, 使它们复合后相等. 把所有 v_i 都后复合此态射, 再依次处理余下的指定态射. 已成立的等式在后复合后仍成立, 而指定态射只有有限个, 故过程终止. 没有给定对象时, 由非空性任取一个对象即可. $\square$

命题 5.56 (滤过余极限中的元素与相等判据). 设 I 为小滤过范畴, $D : I \rightarrow \mathbf{Set}$ 为函子. 在不交并 $\coprod_{i \in \text{Obj}(I)} D(i)$ 中, 对 $x \in D(i), y \in D(j)$ 规定: $(i, x) \sim (j, y)$, 当且仅当存在对象 $k \in I$ 及态射 $\alpha : i \rightarrow k, \beta : j \rightarrow k$, 使 $D(\alpha)x = D(\beta)y$. 则 $\sim$ 是等价关系, 其商集是 D 的余极限. 记 $[i, x]$ 为 (i, x) 的等价类, 第 i 个结构映射把 $x \in D(i)$ 送到 $[i, x]$.

若 $D : I \rightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$ 为函子, 则在其底层集合的上述商集上规定

$$[i, x] + [j, y] = [k, D(\alpha)x + D(\beta)y], \quad a[i, x] = [i, ax] \quad (a \in A),$$

其中 $\alpha : i \rightarrow k, \beta : j \rightarrow k$ 为任意具有共同目标的态射. 这些运算使该商集连同各结构映射 $D(i) \rightarrow \text{colim } D, x \mapsto [i, x]$ 成为模范畴中的余极限. 在集合与模两种情形中, 对同一对象 $i \in I$ 的元素 $x, y \in D(i)$, 等式 $[i, x] = [i, y]$ 成立, 当且仅当存在态射 $\alpha : i \rightarrow j$, 使 $D(\alpha)x = D(\alpha)y$. 特别地, 若指标范畴来自有向集 I , 记过渡映射为 $u_{ij} : D(i) \rightarrow D(j) (i \leq j)$, 则对 $i \in I$ 及 $x, y \in D(i)$, 有

$$[i, x] = [i, y] \iff \text{存在 } j \geq i \text{ 使 } u_{ij}(x) = u_{ij}(y).$$

证明. 自反性与对称性直接成立. 若 $(i, x) \sim (j, y), (j, y) \sim (\ell, z)$, 把实现这两次相等的态射一同送到引理 5.55 的共同目标中, 则 x, y, z 的像相等, 故传递性成立. 结构映射满足 $[j, D(\alpha)x] = [i, x] (\alpha : i \rightarrow j, x \in D(i))$. 设 S 为集合, 映射 $h_i : D(i) \rightarrow S$ 满足 $h_j \circ D(\alpha) = h_i (\alpha : i \rightarrow j)$. 规定 $h([i, x]) = h_i(x)$; 相容性保证良定义, 每个等价类有代表元保证唯一性.

在模的情形, 先验证所给运算与选择无关. 若改变代表元、共同目标或到共同目标的态射, 所有选择及证明代表元相等的态射只涉及有限多个对象和态射; 用上述引理把它们送到同一目标, 两个运算结果便相等. 零元由任一对象中的 0 代表. 每个模公理只涉及有限多个元素, 送到共同目标后即化为该对象中的公理. 若 S 为 A -模, 且这些 h_i 均为模同态, 则 $h([i, x]) = h_i(x)$ 按上述运算公式保持加法与数乘. 因此 h 是模同态, 给出模的余极限泛性质. 若 $[i, x] = [i, y]$, 则存在 $\alpha, \beta : i \rightarrow k$, 使 $D(\alpha)x = D(\beta)y$. 由滤过条件, 存在 $\gamma : k \rightarrow j$, 使 $\gamma\alpha = \gamma\beta$. 于是 $D(\gamma\alpha)x = D(\gamma\alpha)y$, 得到同一对象中的相等判据. 对有向集, 态射 $i \rightarrow j$ 等价于 $i \leq j$, 便得到最后的公式. $\square$

滤过条件使“在余极限中相等”能在某个共同目标中验证. 模的情形尤其给出: $[i, x] = 0$ 当且仅当存在从 i 出发的过渡态射把 x 送到零.³

对象全体与态射全体均为有限集的范畴称为有限范畴; 以有限范畴为指标的极限称为有限极限. 下面先计算滤过余极限与有限积、等化子的关系, 再据此处理一般有限极限.

命题 5.57 (滤过余极限与有限极限). 设 I 为小滤过范畴, $M, N : I \rightarrow \mathbf{A}\text{-Mod}$ 为函子.

(1) 有限积. 各项的坐标投影诱导同构

$$\begin{aligned} \operatorname{colim}_{i \in I} (M(i) \times N(i)) &\longrightarrow (\operatorname{colim}_{i \in I} M(i)) \times (\operatorname{colim}_{i \in I} N(i)), \\ [i, (m, n)] &\longmapsto ([i, m], [i, n]). \end{aligned}$$

同一结论适用于任意有限多个因子, 包括空积.

(2) 等化子. 设 $f, g : M \Rightarrow N$ 为自然变换. 对每个 $i \in I$, 同态 $f_i, g_i : M(i) \rightarrow N(i)$ 的等化子是 $\ker(f_i - g_i)$, 它们在 M 的过渡同态下组成函子. 记由 f 诱导的同态为

$$\operatorname{colim}_{i \in I} f_i : \operatorname{colim}_{i \in I} M(i) \longrightarrow \operatorname{colim}_{i \in I} N(i), \quad [i, m] \longmapsto [i, f_i(m)],$$

并同样定义 $\operatorname{colim}_{i \in I} g_i$. 则各等化子的包含同态诱导同构

$$\operatorname{colim}_{i \in I} \ker(f_i - g_i) \simeq \ker(\operatorname{colim}_{i \in I} f_i - \operatorname{colim}_{i \in I} g_i).$$

对取值于集合的函子 $M, N : I \rightarrow \mathbf{Set}$, 将核换成等值子集 $\{x \in M(i) : f_i(x) = g_i(x)\}$, 结论相同. 具体地, 对有限范畴 J 及函子 $E : I \rightarrow \mathbf{Fun}(J, \mathcal{C})$, 其中 $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ 或 $\mathbf{A}\text{-Mod}$, 有

$$\operatorname{colim}_{i \in I} \lim_{j \in J} E(i)(j) \simeq \lim_{j \in J} \operatorname{colim}_{i \in I} E(i)(j).$$

这就是按 I 取余极限与有限极限交换的含义.

证明. 有限积. 取目标乘积中的元素对 $([i, m], [j, n])$, 其中 $m \in M(i), n \in N(j)$. 选择态射 $\alpha : i \rightarrow k, \beta : j \rightarrow k$, 则 $[k, (M(\alpha)m, N(\beta)n)]$ 是它的原像, 故所示映射满射. 若 $[i, (m, n)]$ 与 $[j, (m', n')]$ 的像相同, 则 $[i, m] = [j, m'], [i, n] = [j, n']$. 由命题 5.56, 这两次相等分别在某个共同目标中实现. 引理 5.55 把所涉及的有限多个态射送到同一目标, 使两对坐标同时相等, 故原来的两个类相同, 所示映射单射. 有限多个因子可依次使用此结论; 空积是单点集或零模, 其滤过余极限仍是自身.

等化子. 对每个态射 $\alpha : i \rightarrow j$, 自然性等式 $N(\alpha) \circ f_i = f_j \circ M(\alpha)$ 说明 $[i, f_i(m)] = [j, f_j(M(\alpha)m)]$. 所以给定的公式定义了同态 $\operatorname{colim}_i f_i$; g 同理. 自然性还说明, 若

³滤过范畴与上述元素判据亦见 The Stacks Project, Section 4.19(Tag 04AX).

$f_i(m) = g_i(m)$, 则 $f_j(M(\alpha)m) = g_j(M(\alpha)m)$, 故各项等化子确实组成函子. 这些包含同态诱导命题第二项所示的映射, 将 $[i, m]$ 送到 $[i, m]$.

设 $[i, x] \in \operatorname{colim}_{i \in I} M(i)$ 在两个诱导同态下的像相同, 即 $[i, f_i(x)] = [i, g_i(x)]$. 由命题 5.56 对同一对象中元素的相等判据, 存在态射 $\alpha : i \rightarrow j$, 使 $N(\alpha)f_i(x) = N(\alpha)g_i(x)$. 自然性给出 $f_j(M(\alpha)x) = g_j(M(\alpha)x)$. 因此 $[i, x]$ 由第 j 项的等化子中的元素 $M(\alpha)x$ 代表, 证明该映射满射. 若两个等化子中的代表元在 $\operatorname{colim}_{i \in I} M(i)$ 中相等, 它们在共同目标中的像仍属于等化子, 故已经在等化子的余极限中相等, 证明单射. 这些双射由结构同态诱导, 因而在模的情形是模同构.

一般有限极限. 设 J 为有限范畴, $H : J \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子, 其中 $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ 或 $\mathbf{A-Mod}$. 由第十三讲的集合极限公式及命题 5.24, $\lim H$ 是下列两个映射的等化子:

$$\prod_{j \in \operatorname{Obj}(J)} H(j) \rightrightarrows \prod_{\beta: j \rightarrow k} H(k).$$

对 $(x_j)_{j \in \operatorname{Obj}(J)} \in \prod_{j \in \operatorname{Obj}(J)} H(j)$, 这两个映射在态射 $\beta : j \rightarrow k$ 对应坐标处的值分别为 $H(\beta)(x_j)$ 和 x_k , 两侧均为有限积. 两个映射取值相等, 等价于对每个 $\beta : j \rightarrow k$ 都有 $H(\beta)(x_j) = x_k$, 这正是 $\lim H$ 中元素所满足的等式. 现在设 $E : I \rightarrow \mathbf{Fun}(J, \mathcal{C})$ 为函子. 对每个态射 $\alpha : i \rightarrow i'$, 自然变换 $E(\alpha)$ 在 $j \in J$ 处的映射 $E(\alpha)_j : E(i)(j) \rightarrow E(i')(j)$ 逐坐标诱导 $\lim_{j \in J} E(i)(j) \rightarrow \lim_{j \in J} E(i')(j)$. 另一方面, 对每个 $\beta : j \rightarrow k$, 各映射 $E(i)(\beta)$ 诱导

$$\operatorname{colim}_{i \in I} E(i)(j) \longrightarrow \operatorname{colim}_{i \in I} E(i)(k), \quad [i, x] \mapsto [i, E(i)(\beta)(x)].$$

由 $E(\alpha)$ 的自然性, 该映射良定义; 恒等与复合公理由各 $E(i)$ 的函子公理给出. 这些诱导映射分别给出以 I 和 J 为指标的函子. 对每个 $i \in I$, 将前面的有限积与等化子描述用于函子 $E(i) : J \rightarrow \mathcal{C}$. 先用本命题的等化子部分, 将余极限移入这个等化子的两侧; 再用有限积部分, 把两侧分别改写为 $\prod_{j \in \operatorname{Obj}(J)} \operatorname{colim}_i E(i)(j)$ 与 $\prod_{\beta: j \rightarrow k} \operatorname{colim}_i E(i)(k)$. 两条诱导映射仍逐坐标比较过渡映射的像与目标坐标, 故其等化子就是右侧的有限极限. 由此得到

$$\operatorname{colim}_{i \in I} \lim_{j \in J} E(i)(j) \simeq \lim_{j \in J} \operatorname{colim}_{i \in I} E(i)(j).$$

这就证明了所述交换性. □

习题

基础练习(1-5)

- (1) 重新分组直和与直积. 设 A 为环, I, J 为集合, $(M_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ 为一族 A -模. 对以集合 K 为指标的 A -模族 $(N_k)_{k \in K}$, 直积 $\prod_{k \in K} N_k$ 由满足 $n_k \in N_k$ 的族 $(n_k)_{k \in K}$ 组成, 加法与数乘逐坐标定义. 直和 $\bigoplus_{k \in K} N_k$ 是其中只有有限多个非零坐标的元素组成的子模; 这一条件称为有限支撑. 空指标时, 两者均为零模.

- a. 写出下列同构及其逆, 并说明直和情形中的有限支撑条件如何对应:

$$\bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{j \in J} M_{ij} \simeq \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} M_{ij}, \quad \prod_{i \in I} \prod_{j \in J} M_{ij} \simeq \prod_{(i,j) \in I \times J} M_{ij}.$$

- b. 取 $A = \mathbb{Z}$. 考虑保持各坐标数值的映射

$$\Phi : \bigoplus_{i \geq 1} \prod_{j \geq 1} \mathbb{Z} \rightarrow \prod_{j \geq 1} \bigoplus_{i \geq 1} \mathbb{Z}, \quad ((a_{ij})_j)_i \mapsto ((a_{ij})_i)_j.$$

用行、列的非零项描述两端的整数矩阵, 证明 Φ 是单射群同态, 并判断它是否满射. 提示: 考察 $a_{ij} = 1$ 当 $i = j$ 、其余为 0 的矩阵.

- (2) 等化子与余等化子.

- a. 设 $f, g : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ 为群同态, $f(x, y) = (6x, x + y)$, $g(x, y) = (6y, x + y)$. 求它们在阿贝尔群范畴中的等化子与余等化子, 并写出结构同态.
- b. 设 A 为环, I 为小范畴, $D : I \rightarrow A\text{-Mod}$ 为函子. 令

$$P = \prod_{i \in \text{Obj}(I)} D(i), \quad Q = \prod_{\alpha : i \rightarrow j} D(j),$$

其中第二个积以 I 的全部态射为指标. 定义同态 $a, b : P \rightarrow Q$, 使 $a((m_i)_i)$, $b((m_i)_i)$ 在 $\alpha : i \rightarrow j$ 处的坐标分别为 $D(\alpha)(m_i)$, m_j . 证明 $\ker(a - b)$ 连同各坐标投影的限制构成 D 的极限.

- (3) 模的推出.

- a. 设 A 为环, M 为 A -模, U, V 为其子模. 直接验证包含同态 $U \cap V \hookrightarrow U$, $U \cap V \hookrightarrow V$ 的推出是 $U + V$, 结构同态为两个包含同态.
- b. 在阿贝尔群范畴中, 分别计算

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 3} \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \xleftarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$$

的推出, 并在所选同构下写出两个结构同态. 提示: 对 $f : L \rightarrow M, g : L \rightarrow N$, 可从 $(M \oplus N) / \{(f(x), -g(x)) : x \in L\}$ 出发.

(4) 正向极限的两个计算. 以下余极限均在阿贝尔群范畴中取.

a. 计算 $\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots$ 的余极限.

b. 固定素数 p . 对 $n \geq 1$, 令 $M_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, 以 $M_n \rightarrow M_{n+1}$, $a + p^n\mathbb{Z} \mapsto pa + p^{n+1}\mathbb{Z}$ 为过渡同态. 记 $\mathbb{Z}[1/p] = \{a/p^r : a \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. 验证映射

$$M_n \rightarrow \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}, \quad a + p^n\mathbb{Z} \mapsto a/p^n + \mathbb{Z}$$

良定义且相容, 并直接证明它们给出余极限.

c. 在上一问的正向系中, 证明第 n 项的 $a + p^n\mathbb{Z}$ 与第 m 项的 $b + p^m\mathbb{Z}$ 在余极限中相等, 当且仅当存在 $r \geq n, m$, 使 $p^{r-n}a \equiv p^{r-m}b \pmod{p^r}$.

(5) 遗忘函子保持哪些构造? 设 A 为环, $U: A\text{-}\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ 为取底层集合的遗忘函子. 对集合 S , 记 $F(S)$ 为以 S 为基的自由 A -模.

a. 分别用伴随 $F \dashv U$ 和模的极限的元素描述, 证明 U 保持所有小极限.

b. 比较两个零模的余积与它们的底层集合的余积, 证明 U 不保持一般余积.

综合练习(6-9)

(6) 两种张量关系. 设 A 为环, M, N 为 A -模. 对集合 S , 记 $F(S)$ 为以符号 $[x] (x \in S)$ 为基的自由 A -模; 对模使用 F 时取其底层集合. 定义同态 $\epsilon_M: F(M) \rightarrow M$, $[m] \mapsto m$, 并同样定义 ϵ_N . 对 $s = \sum_{m \in M} a_m [m] \in F(M)$, $t = \sum_{n \in N} b_n [n] \in F(N)$, 其中两族系数 $(a_m)_{m \in M}, (b_n)_{n \in N}$ 均在 A 中取值且具有有限支撑, 规定

$$\begin{aligned} \alpha, \beta: F(F(M) \times F(N)) &\rightarrow F(M \times N), \\ \alpha([(s, t)]) &= [(\epsilon_M(s), \epsilon_N(t))], \quad \beta([(s, t)]) = \sum_{m, n} a_m b_n [(m, n)]. \end{aligned}$$

这些基元素上的取值确定同态 α, β . 令 $R \subseteq F(M \times N)$ 为由下列元素生成的子模, 其中 $m, m' \in M, n, n' \in N, a \in A$:

$$\begin{aligned} &[(m + m', n)] - [(m, n)] - [(m', n)], \\ &[(m, n + n')] - [(m, n)] - [(m, n')], \\ &[(am, n)] - a[(m, n)], \quad [(m, an)] - a[(m, n)]. \end{aligned}$$

证明 $R = \text{im}(\alpha - \beta)$, 从而两组关系定义同一个商模 $M \otimes_A N$. 提示: 先为 R 的四类生成元选取适当的 (s, t) , 再在商模 $F(M \times N)/R$ 中展开有限和.

(7) 逆向极限与满射. 对 $n \geq 1$, 令 $q_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ 为商同态, $r_n: \mathbb{Z}/2^{n+1}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ 为自然商同态. 将各个 $\mathbb{Z}$ 用恒等同态连成逆向系, 将各个 $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ 用 r_n 连

成逆向系. 以下极限均在阿贝尔群范畴中取.

a. 证明 $(q_n)_{n \geq 1}$ 诱导的极限同态为

$$q : \mathbb{Z} \longrightarrow \varprojlim_{n \geq 1} \mathbb{Z}/2^n \mathbb{Z}, \quad a \longmapsto (a \bmod 2^n)_{n \geq 1}.$$

b. 证明每个 $\mathbb{Z}/2^n \mathbb{Z}$ 中存在唯一的 a_n 满足 $3a_n = -1$. 证明 $r_n(a_{n+1}) = a_n$, 而 $(a_n)_{n \geq 1}$ 不在 q 的像中.

c. 以包含同态 $2^{n+1}\mathbb{Z} \hookrightarrow 2^n\mathbb{Z}$ 为过渡同态, 计算 $\varprojlim_{n \geq 1} 2^n\mathbb{Z}$. 证明各包含同态 $2^n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ 诱导的同态是 q 的核.

(8) 张量积与无限直积. 考虑由坐标投影诱导的群同态

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \prod_{n \geq 1} \mathbb{Z} &\longrightarrow \prod_{n \geq 1} \mathbb{Q}, \\ q \otimes (a_n)_{n \geq 1} &\longmapsto (qa_n)_{n \geq 1}. \end{aligned}$$

证明 $\text{im } \Phi$ 恰由有共同非零整数分母的有理数序列组成, 即存在 $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 使所有坐标乘以 d 后均为整数的序列. 据此证明 $(2^{-n})_{n \geq 1}$ 不在像中. 再证明: 对任意环 A 、 A -模 M 及 r 个 A -模 $N_1, \dots, N_r$ ($r \geq 1$), 坐标投影诱导同构 $M \otimes_A \prod_{j=1}^r N_j \simeq \prod_{j=1}^r (M \otimes_A N_j)$. 提示: 张量积中的元素是有限个纯张量之和; 模的有限积也是有限直和.

(9) 范数与正向极限. 固定 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 记 $\mathbf{Norm}_1$ 为赋范 $\mathbb{F}$ -空间与压缩线性映射组成的范畴, 其中压缩指 $\|Tx\| \leq \|x\|$; 记 $\mathbf{Ban}_1$ 为完备空间及其间压缩线性映射组成的子范畴. 对 $n \geq 1$, 令 $E_n = \mathbb{F}^n$, 以末尾添零的映射 $u_n : E_n \rightarrow E_{n+1}$ 为过渡映射, 分别考虑范数

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

记 c_{00} 为有限支撑序列组成的空间, 并令

$$\ell^1 = \{(x_j)_{j \geq 1} : \sum_{j \geq 1} |x_j| < \infty\}, \quad c_0 = \{(x_j)_{j \geq 1} : x_j \rightarrow 0\},$$

其中坐标均在 $\mathbb{F}$ 中, 范数分别为 $\|x\|_1 = \sum_{j \geq 1} |x_j|$ 、 $\|x\|_\infty = \sup_{j \geq 1} |x_j|$. 可使用 ℓ^1, c_0 的完备性.

a. 证明两种范数对应的正向极限在 $\mathbf{Norm}_1$ 中都是配备相应范数的 c_{00} , 在 $\mathbf{Ban}_1$ 中分别为 ℓ^1, c_0 , 结构映射均为末尾添零.

b. 在 E_n 上取 $\|\cdot\|_\infty$, 令 $f_n : E_n \rightarrow \mathbb{F}$, $f_n(x) = \sum_{j=1}^n jx_j$. 计算算子范数 $\|f_n\|$, 验证 $f_{n+1}u_n = f_n$, 并证明不存在有界线性映射 $f : c_{00} \rightarrow \mathbb{F}$ 同时限制为所有 f_n .

- c. 仍在各 E_n 上取 $\|\cdot\|_\infty$. 若线性映射 $g_n : E_n \rightarrow \mathbb{F}$ 满足 $g_{n+1}u_n = g_n$ 及 $\sup_n \|g_n\| < \infty$, 证明它们在 c_{00} 上诱导唯一有界线性映射, 并且该映射唯一地延拓为 c_0 上的有界线性映射.

进阶选做(10–13)

- (10) Banach 空间中的余核. 固定 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 考虑 Banach $\mathbb{F}$ -空间及全部有界线性映射的范畴. 设 E, F 为 Banach $\mathbb{F}$ -空间, $T : E \rightarrow F$ 为有界线性映射. 令 $H = \overline{T(E)}$, 闭包在 F 中取.

a. 证明

$$\|y + H\|_{F/H} = \inf_{z \in H} \|y - z\|_F$$

在商空间 F/H 上定义范数, 并证明 F/H 完备. 提示: 从商空间的 Cauchy 列中取相邻距离小于 2^{-n-1} 的子列, 再逐次选择相邻距离小于 2^{-n} 的代表元.

- b. 设 G 为 Banach $\mathbb{F}$ -空间, $h : F \rightarrow G$ 有界线性, 且 $hT = 0$. 证明 h 唯一地分解为 $F \rightarrow F/H \xrightarrow{\bar{h}} G$, 并满足 $\|\bar{h}\| \leq \|h\|$. 由此证明商映射 $F \rightarrow F/H$ 是 T 的余核, 即 T 与零映射 $E \rightarrow F$ 的余等化子.

c. 对 $r = 1, 2$, 令

$$\ell^r = \{(x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}_{>0}} : \sum_{n \geq 1} |x_n|^r < \infty\}, \quad \|x\|_r = (\sum_{n \geq 1} |x_n|^r)^{1/r}.$$

可使用 ℓ^2 的完备性. 证明 ℓ^1 完备, 且包含映射 $\ell^1 \hookrightarrow \ell^2$ 有界、像稠密. 求此映射在 Banach 空间范畴中的余核, 并证明它在向量空间范畴中的余核非零. 提示: 完备性可逐坐标取极限后估计有限和; 非零商类可考察 $(1/n)_{n \geq 1}$.

- (11) 共同目标条件还不够. 设范畴 I 只有两个对象 $0, 1$ 、各自的恒等态射, 以及两个不同的态射 $a, b : 0 \rightarrow 1$.

- a. 证明 I 非空, 任意两个对象都有共同目标, 但不存在态射 $c : 1 \rightarrow k$ 使 $ca = cb$.
- b. 定义函子 $D : I \rightarrow \mathbf{Set}$: $D(0) = \{y\}$, $D(1) = \{x, z\}$, 其中 $x \neq z$, 并令 $D(a)y = x, D(b)y = z$. 在不交并 $D(0) \sqcup D(1)$ 上规定 $(i, u) \sim (j, v)$, 当且仅当存在 $\alpha : i \rightarrow k, \beta : j \rightarrow k$ 使 $D(\alpha)u = D(\beta)v$. 证明此关系不具传递性, 并计算 D 在集合范畴中的余极限.

- (12) 正向极限与核. 设 A 为环, I 为非空有向偏序集, $(M_i, \mu_{ij}), (N_i, \nu_{ij})$ 为以 I 为指标的 A -模正向系. 设同态 $u_i : M_i \rightarrow N_i$ 满足 $\nu_{ij}u_i = u_j\mu_{ij} (i \leq j)$, 记它们诱导的同态为 $u : \varinjlim_i M_i \rightarrow \varinjlim_i N_i$. 可使用以下元素判据: 每个正向极限元素都来自某一项; 同一项的两个元素在极限中相等, 当且仅当它们在某个后续项中的像相等.

- 证明 μ_{ij} 限制为 $\ker u_i \rightarrow \ker u_j$, 且包含同态诱导同构 $\varinjlim \ker u_i \simeq \ker u$.
- 若每个 u_i 满射, 证明 u 满射.
- 另设 M 为 A -模, $(L_i)_{i \in I}$ 为满足 $i \leq j \Rightarrow L_i \subseteq L_j$ 的子模族, $N \subseteq M$ 为固定子模. 对映射 $L_i \rightarrow M/N$ 应用第一问, 证明

$$(\bigcup_{i \in I} L_i) \cap N = \bigcup_{i \in I} (L_i \cap N).$$

- (13) 遗忘函子与滤过余极限. 设 A 为环, I 为小滤过范畴, $D : I \rightarrow A\text{-Mod}$ 为函子, $U : A\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ 为取底层集合的遗忘函子. 在不交并 $\coprod_{i \in \text{Obj}(I)} U(D(i))$ 上规定: $(i, x) \sim (j, y)$, 当且仅当存在态射 $\alpha : i \rightarrow k, \beta : j \rightarrow k$ 使 $D(\alpha)x = D(\beta)y$.
- 证明 $\sim$ 是等价关系, 并在其商集上定义加法与 A -数乘, 使各映射 $D(i) \rightarrow (\coprod_{i \in \text{Obj}(I)} U(D(i))) / \sim$ 成为模同态.
 - 验证此商集同时给出底层集合的余极限与模的余极限, 因而自然映射 $\text{colim}(U \circ D) \rightarrow U(\text{colim } D)$ 为双射. 这一结论能否仅由 U 是右伴随推出?

选做专题: 从函数极限到范畴论极限

把函数在越来越小的邻域中的值包进闭区间, 会留下什么? 本专题从这一问题出发, 依次研究闭区间、误差和闭包三个构造. 计算中将遇到振荡、趋于无穷, 以及只有一个聚点却不收敛的数列.

I. 滤子与网. 设 S 为非空集合. S 上的滤子(filter)是由 S 的子集组成的集合 $\mathcal{F}$, 满足: $S \in \mathcal{F}, \emptyset \notin \mathcal{F}; F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{F}; F \in \mathcal{F}, F \subseteq G \subseteq S \Rightarrow G \in \mathcal{F}$.

拓扑空间是带有指定开集族的集合; 开集族包含空集和全空间, 对任意并及有限交封闭. 实数集取通常拓扑, 其开集是开区间的并. 点的开邻域是包含该点的开集. 设 Y 为拓扑空间, $f : S \rightarrow Y$ 为映射. 若对 $\ell \in Y$ 的每个开邻域 V 都有 $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$, 称 f 沿 $\mathcal{F}$ 收敛于 ℓ , 记作 $f \xrightarrow{\mathcal{F}} \ell$.

- 设 $E \subseteq \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$, 且对每个 $\delta > 0$, 集合

$$U_\delta = \{x \in E : 0 < |x - a| < \delta\}$$

均非空. 令 $S = E \setminus \{a\}$.

- 证明

$$\mathcal{N}_a^* = \{F \subseteq S : \text{存在 } \delta > 0 \text{ 使 } U_\delta \subseteq F\}$$

是 S 上的滤子, 称为穿孔邻域滤子. 若某个 U_δ 为空, 会违反哪条滤子公理?

- b. 设 $f: S \rightarrow \mathbb{R}, \ell \in \mathbb{R}$. 将 $f \xrightarrow{\mathcal{N}_a^*} \ell$ 写成 ε - δ 条件, 并与通常的 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ 比较, 其中 x 在定义域 S 内取值.
2. 设非空集合 I 配有自反、传递的关系 $\leq$, 且对任意 $i, j \in I$, 存在 $k \in I$ 满足 $i \leq k, j \leq k$. 称这样的 I 为有向预序集. 对任意集合 X , 点族 $(x_i)_{i \in I} (x_i \in X)$ 称为 X 中的网(net). 记 $I_{\geq i} = \{j \in I : i \leq j\}$.
- a. 证明
- $$\mathcal{F}_I = \{F \subseteq I : \text{存在 } i \in I \text{ 使 } I_{\geq i} \subseteq F\}$$
- 是 I 上的滤子, 称为尾滤子, 并证明 $i \leq j \Rightarrow I_{\geq j} \subseteq I_{\geq i}$.
- b. 设 X 为拓扑空间, $\ell \in X$. 网的收敛定义为映射 $i \mapsto x_i$ 沿尾滤子的收敛. 证明这等价于: 对 ℓ 的每个开邻域 V , 存在 $i \in I$, 使所有 $j \geq i$ 都满足 $x_j \in V$. 当 I 为配通常大小关系的正整数集时, 网就是数列.
3. 设 S 为非空集合, $\mathcal{F}$ 为 S 上的滤子, Y 为拓扑空间, $f: S \rightarrow Y$ 为映射, $\ell \in Y$.
- a. 证明 $f \xrightarrow{\mathcal{F}} \ell$ 当且仅当: 对 ℓ 的每个开邻域 V , 存在 $F \in \mathcal{F}$ 使 $f(F) \subseteq V$.
- b. 若任意两个不同点都有不相交的开邻域, 则称 Y 为 Hausdorff 空间. 证明此时 f 沿 $\mathcal{F}$ 至多有一个极限.

II. 闭区间中的极限.

4. 定义范畴 $\mathbf{Int}(\mathbb{R})$: 对象为空集、 $\mathbb{R}$, 以及 $[a, b], [a, +\infty), (-\infty, b]$, 其中端点为实数, 有界区间要求 $a \leq b$; 当且仅当 $J \subseteq J'$ 时, 以包含映射 $J \hookrightarrow J'$ 为唯一态射. 本专题称这些对象为闭区间, 允许区间为空或无界.
- a. 约定 $\mathbb{R}$ 中空族子集的交为 $\mathbb{R}$. 证明任意一族对象的交仍是对象.
- b. 设 K 为小范畴, $D: K \rightarrow \mathbf{Int}(\mathbb{R})$ 为函子. 验证其极限是 $\bigcap_{k \in \text{Obj}(K)} D(k)$, 其中 $\text{Obj}(K)$ 表示 K 的对象集合, 结构态射为包含映射. 空图表的极限是什么?
5. 设 S 为非空集合, $\mathcal{F}$ 为 S 上的滤子, $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ 为映射. 记 $I_{\mathcal{F}}$ 为以滤子成员为对象、包含映射 $F \hookrightarrow G$ 为态射的范畴. 对 $F \in \mathcal{F}$, 令 $H_f(F)$ 为包含 $f(F)$ 的最小闭区间, 即 $\mathbf{Int}(\mathbb{R})$ 中所有包含 $f(F)$ 的对象之交.
- a. 证明 $H_f(F)$ 存在且非空, 并且这些区间与包含映射给出函子 $H_f: I_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbf{Int}(\mathbb{R})$, 满足

$$\lim H_f = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} H_f(F).$$

称 H_f 为 f 沿 $\mathcal{F}$ 的闭区间函子.

- b. 对有向预序集 J , 以其元素为对象, 在 $j \leq k$ 时取唯一态射 $k \rightarrow j$, 所得范畴记为 J^{op} . 从 J^{op} 出发的函子称为以 J 为指标的逆向系. 在 $\mathcal{F}$ 上定义 $F \leq G$ 当且仅当 $G \subseteq F$. 证明 $(\mathcal{F}, \leq)$ 是有向预序集, 并说明 H_f 是以它为指标的逆向系.
- c. 另设 I 为有向预序集, $(x_i)_{i \in I}$ 为实数值网. 令 H_i 为包含尾部 $\{x_j : j \geq i\}$ 的最小闭区间. 把 I 看成 $i \leq j$ 时有唯一态射 $i \rightarrow j$ 的范畴, 证明这些尾部区间与包含映射给出函子 $I^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Int}(\mathbb{R})$. 证明其极限等于映射 $x : I \rightarrow \mathbb{R}, i \mapsto x_i$ 沿尾滤子的闭区间函子的极限.
6. 设 S 为非空集合, $\mathcal{F}$ 为 S 上的滤子, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ 为映射, $\ell \in \mathbb{R}$. 对 $F \in \mathcal{F}$, 令 $H_f(F)$ 为包含 $f(F)$ 的最小闭区间; 这些区间与包含映射组成闭区间函子 H_f . 证明

$$f \xrightarrow{\mathcal{F}} \ell \iff \lim H_f = \{\ell\}.$$

提示: 正向先证每个 $H_f(F)$ 都包含 ℓ . 反向对 $\varepsilon > 0$, 分别选取 $F_-, F_+ \in \mathcal{F}$, 使 $H_f(F_-)$ 不含 $\ell - \varepsilon$, $H_f(F_+)$ 不含 $\ell + \varepsilon$, 再取 $F_- \cap F_+$. 这里的范畴论极限是单点区间 $\{\ell\}$, 其元素 ℓ 是通常的实数极限.

III. 误差、计算与导数.

7. 设 S 为非空集合, $\mathcal{F}$ 为 S 上的滤子, (Y, d) 为度量空间, $f : S \rightarrow Y$ 为映射, $\ell \in Y$. 这里度量 $d : Y \times Y \rightarrow [0, +\infty)$ 满足 $d(y, z) = 0 \iff y = z, d(y, z) = d(z, y)$ 及三角不等式 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. 开球为 $B_d(y, r) = \{z \in Y : d(z, y) < r\}$ ($r > 0$), 度量拓扑的开集是开球的并.
- a. 令 $I_{\mathcal{F}}$ 为滤子成员按包含映射组成的范畴, 定义

$$E_{\ell}(F) = \sup_{s \in F} d(f(s), \ell), \quad F \in \mathcal{F}.$$

其中 $\sup$ 表示上确界; 无上界时取值 $+\infty$. 将 $[0, +\infty]$ 看成 $u \leq v$ 时有唯一态射 $u \rightarrow v$ 的范畴, 证明 $E_{\ell} : I_{\mathcal{F}} \rightarrow [0, +\infty]$ 是函子, 且

$$\lim E_{\ell} = \inf_{F \in \mathcal{F}} E_{\ell}(F), \quad f \xrightarrow{\mathcal{F}} \ell \iff \lim E_{\ell} = 0,$$

其中 $\inf$ 表示下确界.

- b. 对实数列 $(x_n)_{n \geq 1}$ 及 $\ell \in \mathbb{R}$, 证明

$$x_n \longrightarrow \ell \iff \inf_{N \geq 1} \sup_{n \geq N} |x_n - \ell| = 0.$$

再设 $E \subseteq \mathbb{R}, a, \ell \in \mathbb{R}, f: E \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$, 且对每个 $\delta > 0, U_\delta = \{x \in E : 0 < |x - a| < \delta\}$ 均非空. 证明

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \inf_{\delta > 0} \sup_{x \in U_\delta} |f(x) - \ell| = 0.$$

8. 对实数列 $x = (x_n)_{n \geq 1}$, 记 $H_N(x)$ 为包含尾部 $\{x_n : n \geq N\}$ 的最小闭区间 ($N \geq 1$). 对非空集合 S 上的滤子 $\mathcal{F}$ 及映射 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, 记 $H_f(F)$ 为包含 $f(F)$ 的最小闭区间 ($F \in \mathcal{F}$).

a. 令

$$u_n = 1/n, \quad v_n = (-1)^n, \quad w_{2n} = 0, \quad w_{2n-1} = n, \quad z_n = n \quad (n \geq 1).$$

分别求四个数列的尾部区间 H_N 及其交, 并判断数列是否收敛于实数. 哪个数列说明: 每个尾部区间非空, 它们的交仍可能为空? 将正整数和实数都按通常大小看成范畴, $n \mapsto v_n$ 是否给出函子? 再对任意实数列 x , 比较 $N \leq M$ 时 $H_N(x)$ 与 $H_M(x)$ 的包含关系.

- b. 取 $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 及其在 0 处的穿孔邻域滤子 $\mathcal{N}_0^*$. 对函数 $f(x) = x \sin(1/x)$, $f(x) = \sin(1/x)$, $f(x) = x/|x|$, 分别计算 $\bigcap_{F \in \mathcal{N}_0^*} H_f(F)$, 并判断 $x \rightarrow 0$ 时的函数极限是否存在.

c. 在 $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上定义

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+ &= \{F \subseteq S : \exists \delta > 0, (0, \delta) \subseteq F\}, \\ \mathcal{F}_- &= \{F \subseteq S : \exists \delta > 0, (-\delta, 0) \subseteq F\}. \end{aligned}$$

验证它们是滤子. 对 $f(x) = x/|x|$, 分别计算沿 $\mathcal{F}_+$ 、 $\mathcal{F}_-$ 的闭区间函子极限, 并读出在 0 处的右极限和左极限.

9. 设 $U \subseteq \mathbb{R}$ 为开区间, $a \in U, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ 为函数. 令

$$S_a = \{h \in \mathbb{R} : h \neq 0, a + h \in U\}, \quad q: S_a \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(h) = \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

在 S_a 上取 $h \rightarrow 0$ 的穿孔邻域滤子 $\mathcal{N}_0^*$, 令 $H_q(F)$ 为包含 $q(F)$ 的最小闭区间, 组成闭区间函子 H_q . 若实数极限 $\lim_{h \rightarrow 0} q(h)$ 存在, 称 g 在 a 处可导, 该极限称为导数 $g'(a)$.

- a. 对 $L \in \mathbb{R}$, 证明 $g'(a) = L$ 当且仅当 $\lim H_q = \{L\}$, 再用上、下确界写出等价的误差条件.
- b. 取 $U = \mathbb{R}, a = 0$. 分别对 $g(x) = |x|$, 以及 $g(0) = 0, g(x) = x^2 \sin(1/x)$ ($x \neq 0$), 求 $\lim H_q$, 判断 $g'(0)$ 是否存在.

- c. 对后一个函数, 证明其导函数在 0 处不连续, 即当 $x \rightarrow 0$ 时, $g'(x)$ 不趋于 $g'(0)$. 可用公式 $g'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ ($x \neq 0$), 并考察 $x_n = 1/(n\pi)$.

IV. 闭包与聚点. 闭区间会补入函数值之间的点. 改取函数值集合的闭包, 可以更细致地记录聚点的位置.

设 Y 为拓扑空间. 闭集是开集的补集; 子集 $B \subseteq Y$ 的闭包 $\bar{B}$ 是包含 B 的所有闭集之交. 子集 $Z \subseteq Y$ 的子空间拓扑以 $Z \cap V$ (V 在 Y 中开) 为开集. 映射连续指开集的逆像为开集; **Top** 表示拓扑空间与连续映射组成的范畴. 覆盖全空间的开集族称为开覆盖; 若每个开覆盖都有有限个成员覆盖全空间, 称该空间紧.

10. 设 S 为非空集合, $\mathcal{F}$ 为 S 上的滤子, Y 为拓扑空间, $f: S \rightarrow Y$ 为映射. 令 $I_{\mathcal{F}}$ 为滤子成员按包含映射组成的范畴, $C_f(F) = \overline{f(F)}$ ($F \in \mathcal{F}$), 各闭包均配备 Y 的子空间拓扑.

- a. 证明这些闭包与包含映射组成函子 $C_f: I_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbf{Top}$, 其极限是

$$C = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{f(F)},$$

配备 Y 的子空间拓扑, 结构态射为包含映射. 提示: 利用 $F \cap G \rightarrow F, F \cap G \rightarrow G$, 说明任一锥的各映射复合到 Y 后都相同.

- b. 对 $y \in Y$, 证明 $y \in C$ 当且仅当 y 的每个开邻域都与每个 $f(F)$ ($F \in \mathcal{F}$) 相交. 称这样的 y 为 f 沿 $\mathcal{F}$ 的聚点.
- c. 对数列 $v_n = (-1)^n$ 及 $w_{2n} = 0, w_{2n-1} = n$ ($n \geq 1$), 分别求

$$C(v) = \bigcap_{N \geq 1} \overline{\{v_n : n \geq N\}}, \quad C(w) = \bigcap_{N \geq 1} \overline{\{w_n : n \geq N\}},$$

其中闭包在 $\mathbb{R}$ 中取. 说明它们分别是这两个数列沿尾滤子的聚点集, 再与包含各尾部的最小闭区间之交比较. 说明闭区间交中的点未必是聚点, 而聚点唯一也未必意味着数列收敛.

- d. 若 Y 紧且 Hausdorff, 证明 $C \neq \emptyset$, 且对 $\ell \in Y$, 有

$$C = \{\ell\} \iff f \xrightarrow{\mathcal{F}} \ell.$$

提示: 先由开覆盖定义证明, 紧空间中具有有限交性质的闭集族的交非空; 有限交性质指任意有限个成员的交非空. 若开邻域 $V \ni \ell$ 不包含任何 $f(F)$, 对闭集族 $\{\overline{f(F)} \cap (Y \setminus V) : F \in \mathcal{F}\}$ 应用此结论.