

5.3 第 15 讲 环的极限、余极限与局部化

第十四讲讨论了模的极限与余极限. 转到环范畴后, 还须构造乘法, 并验证结构映射保持乘法与幺元. 本讲从相容元素族出发计算环的极限, 再通过函数芽认识正向极限与局部化. 随后讨论相容截断给出的逆向极限, 以及张量积给出的推出.

沿用前文关于环与环同态的约定, 环范畴记为 **CRing**, 指标范畴均为小范畴. 正文的正向极限以第十四讲定义的有向集为指标; 一般滤过指标的情形放在选读部分.

5.3.1 环的极限与纤维积

和第十三、十四讲中集合与模的情形一样, 环的极限也由相容的元素族组成. 由于过渡映射是环同态, 逐坐标相加或相乘都保持相容性.

命题 5.58 (环的极限). 设 I 为小范畴, $D : I \rightarrow \mathbf{CRing}$ 为函子. 则 D 的极限为乘积环中的含幺子环

$$\lim D = \{(a_i)_{i \in \text{Obj}(I)} \in \prod_{i \in \text{Obj}(I)} D(i) : D(\alpha)(a_i) = a_j \text{ 对每个 } \alpha : i \rightarrow j\},$$

结构态射为坐标投影 $p_i : \lim D \rightarrow D(i)$. 当 I 为空范畴时, 极限为零环.

证明. 每个 $D(\alpha)$ 都保持环运算, 故相容族对加法、取负与乘法封闭, 并包含幺元 $(1_{D(i)})_i$. 因此它们构成含幺子环, 各坐标投影也是环同态. 设 R 为环, 给定一族环同态 $h_i : R \rightarrow D(i)$, 使得对每个态射 $\alpha : i \rightarrow j$ 都有 $D(\alpha) \circ h_i = h_j$. 令 $h(r) = (h_i(r))_i$, 则 $h : R \rightarrow \lim D$ 是环同态, 且对所有 i 满足 $p_i \circ h = h_i$. 条件 $p_i \circ h = h_i$ 唯一确定各个坐标, 故 h 唯一. 空图表的极限是终对象零环. $\square$

例 5.59 (环的纤维积与两条相交直线). 设 B, C, D 为环, $f : B \rightarrow D$ 与 $g : C \rightarrow D$ 为环同态. 由命题 5.58, 它们在 **CRing** 中的纤维积为 $B \times_D C = \{(b, c) \in B \times C : f(b) = g(c)\}$, 环运算逐坐标进行, 两个坐标投影均为环同态.

设 k 为域, X, Y 为两个变量, 令 $k[X] \rightarrow k$ 与 $k[Y] \rightarrow k$ 均为在 0 处求值的环同态. 此时纤维积 $k[X] \times_k k[Y]$ 的元素是在原点处取值相同的一对多项式 $(P(X), Q(Y))$. 将 $k[X, Y]$ 中的多项式分别限制到两条相交于原点的坐标轴 $Y = 0$ 与 $X = 0$, 得到环同态

$$k[X, Y] \longrightarrow k[X] \times_k k[Y], \quad H \longmapsto (H(X, 0), H(0, Y)).$$

它是满射: 给定 $P \in k[X]$ 与 $Q \in k[Y]$, 若 $P(0) = Q(0) = c$, 则多项式 $P(X) + Q(Y) - c$ 的像就是 (P, Q) . 两个限制都为零, 当且仅当每个非零单项式都同时含有因子 X 与 Y , 故该同态的核为 (XY) . 由此得到环同构 $k[X, Y]/(XY) \simeq k[X] \times_k k[Y]$.

5.3.2 环的正向极限

先看子环的并. 若并集中的任意两个元素都落在某个共同子环中, 就能在其中计算它们的和与积. 为此, 我们用有向集作指标: 这是一个非空偏序集, 其中任意两个指标都有共同上界, 因而有限多个指标也有共同上界.

例 5.60 (有向子环族的并). 设 R 为环, I 为有向集, $(R_i)_{i \in I}$ 为 R 的一族含么子环, 满足当 $i \leq j$ 时 $R_i \subseteq R_j$. 并集中的任意有限多个元素都落在某个共同的 R_k 内, 故并集 $\bigcup_{i \in I} R_i$ 是含么子环. 以子环间的包含映射为过渡同态, 到并集的包含映射为结构同态, 在 **CRing** 中有 $\varinjlim_{i \in I} R_i = \bigcup_{i \in I} R_i$. 验证泛性质如下. 设 B 为环, 同态族 $h_i : R_i \rightarrow B$ 与过渡同态相容. 对 $a \in R_i$, 令 $h(a) = h_i(a)$. 若又有 $a \in R_j$, 取 $k \geq i, j$, 则 $h_i(a) = h_k(a) = h_j(a)$, 故定义与选择无关. 在共同的子环中计算可知 h 保持环运算与么元; 各 R_i 覆盖整个并集, 故 h 唯一.

例 5.61 (无限变量多项式环). 设 A 为环, $T_1, T_2, \dots$ 为一列变量. 每个多项式只涉及有限多个变量, 故属于某个 $A[T_1, \dots, T_n]$. 以包含映射为过渡同态, 有

$$A[T_1, T_2, \dots] = \varinjlim_n A[T_1, \dots, T_n].$$

给定环 B 、环同态 $h : A \rightarrow B$ 及一系列元素 $b_1, b_2, \dots \in B$, 由有限变量情形与正向极限的泛性质, 存在唯一的环同态 $A[T_1, T_2, \dots] \rightarrow B$ 延拓 h 且将每个 T_n 映为 b_n .

例 5.62 (由子环的并得到有理数域). 对整数 $n \geq 1$, 令 $\mathbb{Z}[1/n!] = \{a/(n!)^r : a \in \mathbb{Z}, r \geq 0\}$, 这是 $\mathbb{Q}$ 的含么子环, 且按包含关系排成递增序列 $\mathbb{Z}[1/1!] \subseteq \mathbb{Z}[1/2!] \subseteq \dots$. 任一有理数的分母都整除某个 $n!$, 故这些子环的并是 $\mathbb{Q}$. 由例 5.60, 在 **CRing** 中有

$$\varinjlim_n \mathbb{Z}[1/n!] = \mathbb{Q}.$$

上面三例中的过渡同态都是包含映射. 一般的过渡同态未必单射, 不同元素的像可能相等. 与第十四讲处理模时一样, 我们把元素映到同一后续环中比较, 再取等价类.

命题 5.63 (环的正向极限). 设 I 为有向集, $(R_i, u_{ij})_{i \in I}$ 为 **CRing** 中的正向系: 当 $i \leq j$ 时有环同态 $u_{ij} : R_i \rightarrow R_j$, 满足 $u_{ii} = \text{id}_{R_i}$, 且当 $i \leq j \leq k$ 时有 $u_{jk} \circ u_{ij} = u_{ik}$. 在所有二元组 $(i, x) (i \in I, x \in R_i)$ 组成的集合上定义等价关系:

$$(i, x) \sim (j, y) \iff \text{存在 } k \geq i, j, \text{ 使 } u_{ik}(x) = u_{jk}(y).$$

将 (i, x) 的等价类记为 $[i, x]$. 对 $k \geq i, j$, 定义

$$[i, x] + [j, y] = [k, u_{ik}(x) + u_{jk}(y)], \quad [i, x][j, y] = [k, u_{ik}(x)u_{jk}(y)].$$

加法零元与乘法幺元分别由任一 R_i 中的 $0, 1$ 代表, 负元为 $-[i, x] = [i, -x]$. 上述运算使全体等价类构成正向极限环 $\varinjlim R_i$, 其结构同态为 $u_i : R_i \rightarrow \varinjlim R_i$, $x \mapsto [i, x]$, 满足 $u_j \circ u_{ij} = u_i$.

证明. 关系的自反性与对称性直接成立. 验证传递性时, 将两次比较所用的指标取共同上界, 三者相应环中的像便相等. 运算也不依赖于上界和代表元的选择. 例如, 将 R_k 中算出的乘积再映到 $R_\ell (\ell \geq k)$, 有

$$u_{k\ell}(u_{ik}(x)u_{jk}(y)) = u_{i\ell}(x)u_{j\ell}(y),$$

对任意两个上界, 取它们的共同上界, 就知道两次乘法给出同一等价类. 更换代表元时, 再取共同上界使等价代表元的像相等, 仍可用这一等式比较; 加法同理. 每条环公理只涉及有限多个元素, 将它们映到同一个环中即可验证.

设 B 为环, 同态族 $h_i : R_i \rightarrow B$ 满足 $h_j \circ u_{ij} = h_i$. 令 $h([i, x]) = h_i(x)$. 两个代表元若在某一个共同的环中像相等, 相容性便保证它们在 B 中的像相等, 故 h 良定义. 在共同的环中计算还可知, h 保持加法、乘法与幺元. 每个元素都有代表元 $[i, x]$, 所以满足 $h \circ u_i = h_i$ 的同态只能这样定义. 这就证明了泛性质. $\square$

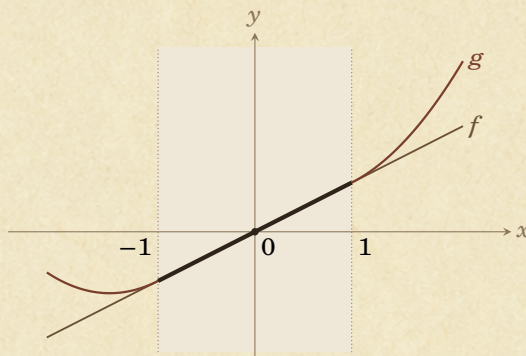
选读: 一般滤过指标. 第十四讲选读部分介绍了比有向集更一般的滤过范畴: 它是非空范畴 I , 其中任意两个对象都有态射映到某个共同对象, 且任意两个平行态射 $\alpha, \beta : i \rightarrow j$ 都能被某个后续态射 $\gamma : j \rightarrow k$ 等化 (即 $\gamma\alpha = \gamma\beta$). 当 I 为滤过小范畴时, 函子 $D : I \rightarrow \mathbf{CRing}$ 的余极限称为滤过余极限. 上述等价类构造对此情形依然适用: $[i, x] = [j, y]$ 当且仅当存在态射 $\alpha : i \rightarrow k$ 与 $\beta : j \rightarrow k$ 使得 $D(\alpha)(x) = D(\beta)(y)$, 加法与乘法也通过映到共同目标 $D(k)$ 中定义. 等价关系及环运算的良定义性由第十四讲引理 5.55 与命题 5.56 直接保证.

5.3.3 连续函数芽与全纯函数芽

把在一点的某个邻域上相等的函数归为一类, 便得到该点处的函数芽. 邻域缩小时的限制映射构成正向系, 其正向极限恰好由这些芽组成.

〔史略〕 从植物的嫩芽到函数芽

“芽”对应法语 *germe* 和英语 *germ*. 法语 *germe* 源自拉丁语 *germen*, 意为嫩芽、萌枝. 用于函数时, “芽”指函数在一点附近的局部形态. 这一术语出现于 H. Cartan 的 1952 年讲义, 其中芽环被表示为邻域上函数环的正向极限.¹

植物的嫩芽: *germe* $U = (-1, 1)$: 两条曲线在整段上重合

右图取 $f(x) = x, g(x) = x + \max\{|x| - 1, 0\}^2$, 二者都是实直线上的连续函数. 粗线是它们在 $U = (-1, 1)$ 上共同的图像, 故它们在 0 处的芽相等.

例 5.64 (连续函数芽与局部可逆性). 令 $R = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 为实直线上实值连续函数组成的环, 加法与乘法逐点定义. 函数 $f(x) = 1 - x$ 属于 R . 因为 $f(1) = 0$, 它在 R 中不可逆; 但在 0 附近, 连续函数 $1/(1 - x)$ 就是它的倒数.

对整数 $n \geq 1$, 令 $K_n = [-1/n, 1/n]$, 记 $C(K_n, \mathbb{R})$ 为 K_n 上的实值连续函数环. 区间缩小时的限制同态构成正向系 $C(K_1, \mathbb{R}) \rightarrow C(K_2, \mathbb{R}) \rightarrow \dots$. 记 $I_n = \{g \in R : g|_{K_n} = 0\}$, 这是限制同态 $r_n : R \rightarrow C(K_n, \mathbb{R})$ 的核. 将 K_n 上的连续函数在区间两侧分别延拓为相应端点的常值, 就得到 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 故 r_n 是满射. 因此 $C(K_n, \mathbb{R}) \simeq R/I_n$, 正向系中的限制映射对应于自然商同态 $R/I_n \rightarrow R/I_{n+1}$. 由 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$, 并集 $I = \bigcup_{n \geq 1} I_n$ 也是 R 的理想, 由所有在 0 的某个邻域上恒为零的连续函数组成. 下面证明

$$\varinjlim_n C(K_n, \mathbb{R}) \simeq R/I,$$

其中结构同态由自然商同态 $R/I_n \rightarrow R/I$ 给出. 设 B 为环, 给定与限制同态相容的一族环同态 $h_n : C(K_n, \mathbb{R}) \rightarrow B (n \geq 1)$. 复合同态 $h_n \circ r_n : R \rightarrow B$ 与 n 无关, 且在每个 I_n 上为零, 从而消去 $I = \bigcup_{n \geq 1} I_n$, 诱导环同态 $R/I \rightarrow B$. 由 r_n 满射, 这个同态与每个 h_n 相容, 而且唯一, 故满足余极限的泛性质.

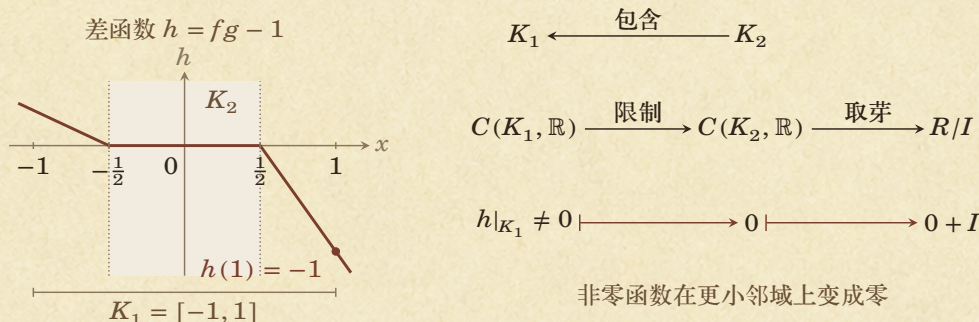
对 $g, h \in R$, 有 $g + I = h + I$, 当且仅当它们在某个 K_n 上相等, 也就是在 0 的某个邻域上一致. 这样的等价类称为 0 处的连续函数芽. 任一在 0 附近定义的连续函数, 都可先限制到某个 K_n , 再按端点常值延拓到 $\mathbb{R}$, 因此 R/I 包含 0 处的全部连续函数芽.

¹词源见《法兰西学院词典》第九版 *germe* 条目. 早期数学用法见 H. Cartan, *La notion d'espace analytique général et de fonction holomorphe sur un tel espace*, Séminaire Henri Cartan 1951–1952, 第 13 讲 (1952 年 3 月 24 日, 31 日), 第 13-1 页与第 13-5 页.

回到 $f(x) = 1 - x$. 将 $K_2 = [-1/2, 1/2]$ 上的函数 $x \mapsto 1/(1-x)$ 按端点常值延拓到整条实直线, 令

$$g(x) = \begin{cases} 2/3, & x \leq -1/2, \\ 1/(1-x), & -1/2 \leq x \leq 1/2, \\ 2, & x \geq 1/2. \end{cases}$$

这个连续函数在 K_2 上满足 $fg = 1$, 故 $(f+I)(g+I) = 1+I$, 即 f 的芽可逆. 差函数 $h = fg - 1$ 满足 $h(1) = -1$ 而 $h|_{K_2} = 0$, 说明限制同态 $C(K_1, \mathbb{R}) \rightarrow C(K_2, \mathbb{R})$ 及到芽环的结构同态都可能不是单射. 下图画出这个非零函数在限制后变为零的过程.



例 5.65 (全纯函数芽是正向极限). 固定一点 $z_0 \in \mathbb{C}$. 对开集 $U \subseteq \mathbb{C}$, 记 $\mathcal{O}(U)$ 为 U 上的全纯函数 (即在 U 的每一点都复可微的函数) 组成的环, 加法与乘法逐点定义. 在 z_0 的全体开邻域组成的集合上按反包含关系规定偏序: $U \leq V \iff V \subseteq U$. 交集 $U \cap V$ 是共同上界, 故这是有向集; 限制同态 $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$ 给出环的正向系.

考虑所有二元组 (U, f) , 其中 U 为 z_0 的开邻域, $f \in \mathcal{O}(U)$. 对两个这样的二元组 $(U, f), (V, g)$, 若存在 z_0 的开邻域 $W \subseteq U \cap V$ 使得 $f|_W = g|_W$, 就规定它们等价. 这正是命题 5.63 中的等价关系. 记等价类为 $[U, f]$, 称为 z_0 处的全纯函数芽. 相加或相乘时, 把代表函数限制到共同邻域再运算. 所得的芽环记为 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}, z_0}$. 由该命题,

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}, z_0} = \varinjlim_{U \ni z_0} \mathcal{O}(U).$$

也可以只取圆盘 $U_n = \{z : |z - z_0| < 1/n\} (n \geq 1)$: 每个邻域都包含某个 U_n , 所以每个芽都能在某个 U_n 上表示, 两个代表是否给出同一个芽, 也能在更小的圆盘 U_m 上检验. 因此 $\varinjlim_n \mathcal{O}(U_n) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}, z_0}$.

取局部坐标 $t = z - z_0$, 可以用幂级数具体刻画 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}, z_0}$. 回顾形式幂级数环 $\mathbb{C}[[t]]$: 其元素为形式级数 $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ ($a_n \in \mathbb{C}$), 不要求收敛. 加法逐项进行; 两个级数 $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ 与 $\sum_{n \geq 0} b_n t^n$ 的乘积中, t^n 的系数为有限和 $\sum_{r=0}^n a_r b_{n-r}$. 其中收敛半径

严格大于零的幂级数构成子环

$$\mathbb{C}\{t\} = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n t^n \in \mathbb{C}[[t]] : \text{存在 } r > 0 \text{ 使 } \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n < \infty \right\},$$

这里 r 可随级数而变. 对两个级数取一个共同满足绝对收敛条件的 $r > 0$, 就能验证和与积仍属于 $\mathbb{C}\{t\}$. 复分析中的 Taylor 展开定理说, 全纯函数在每一点附近等于其收敛的 Taylor 级数. 因此 $[U, f] \mapsto \sum_{n \geq 0} f^{(n)}(z_0) t^n / n!$ 给出环同构 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}, z_0} \simeq \mathbb{C}\{t\}$. 展开只依赖于芽, 故此映射良定义; 级数又确定了函数在某个邻域上的取值, 故它为单射; 每个收敛幂级数都定义一个全纯函数芽, 故它也是满射. 例如, $z \mapsto 1/(1 - (z - z_0))$ 在 z_0 处的芽对应几何级数 $\sum_{n \geq 0} t^n$. 函数芽与点值也有区别: 坐标函数 $z \mapsto z - z_0$ 在 z_0 处取值为零, 却不在任何邻域上恒零, 所以它的芽非零.

5.3.4 局部化与函数芽

一个连续函数在某点取值非零, 它的倒数便在该点的某个邻域上有定义且连续; 全纯函数也一样. 因此, 在一点附近计算时, 可以除以在该点不为零的函数. 对一般环, 我们也可以指定哪些元素允许作分母, 所得的环称为局部化.

设 A 为环, $X = \text{Spec} A$, 并记 $\mathcal{O}_X$ 为第九讲定义的正则函数环层. 对 $s \in A$, 记主开集 $D(s) = \{\mathfrak{q} \in X : s \notin \mathfrak{q}\}$. 回顾第九讲的计算: $\mathcal{O}_X(D(s)) \simeq A[T]/(sT - 1)$, 其中 T 为变量, 其剩余类表示 s 在 $D(s)$ 上的逆元. 包含 1 且对乘法封闭的子集 $S \subseteq A$ 称为 A 的一个乘性集 (multiplicative set). 固定乘性集 S , 将主开集族 $\{D(s) : s \in S\}$ 按反包含关系排序: $U \leq V$ 表示 $V \subseteq U$, 对应限制同态 $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$. 由 $D(1) = X$ 及 $D(st) = D(s) \cap D(t)$, 这些正则函数环构成环的正向系.

定义 5.66 (局部化). 上述正向系在环范畴中的余极限

$$S^{-1}A := \varinjlim_{U \in \{D(s) : s \in S\}} \mathcal{O}_X(U)$$

称为 A 关于乘性集 S 的局部化 (localization). 由 $D(1) = X$ 及 $\mathcal{O}_X(X) \simeq A$, 得到自然环同态 $\lambda : A \rightarrow S^{-1}A$.

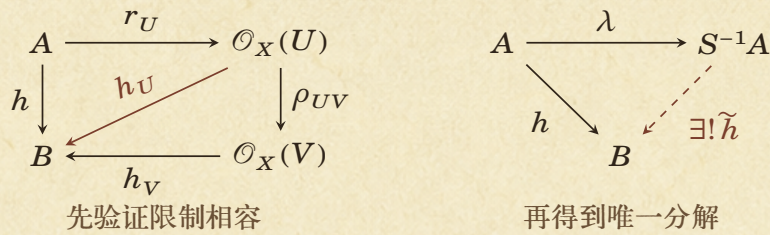
命题 5.67 (局部化的存在性与泛性质). 上述余极限存在, 且每个 $s \in S$ 的像 $\lambda(s)$ 在 $S^{-1}A$ 中都可逆. 对任意环 B 及将 S 中元素都映为可逆元的环同态 $h : A \rightarrow B$, 存在唯一的环同态 $\tilde{h} : S^{-1}A \rightarrow B$, 使得 $\tilde{h} \circ \lambda = h$.

证明. 由命题 5.63, 正向极限 $S^{-1}A$ 存在. 每个 $s \in S$ 的限制在 $\mathcal{O}_X(D(s))$ 中可逆, 故 $\lambda(s)$ 可逆.

设 $h : A \rightarrow B$ 为将 S 映为可逆元的环同态. 对 $U = D(s)$ ($s \in S$), 记 $r_U : A \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ 为限制同态. 由 $\mathcal{O}_X(U) \simeq A[T]/(sT - 1)$, 将 T 映为 $h(s)^{-1}$, 就得到唯一满

足 $h_U \circ r_U = h$ 的环同态 $h_U : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow B$. 这个唯一性条件只涉及 U , 所以 h_U 不依赖于把 U 写成哪个 $D(s)$.

若 $V \subseteq U$ 是指标集中的两个主开集, 记 $\rho_{UV} : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ 为限制同态. 由 $\rho_{UV} \circ r_U = r_V$, 有 $(h_V \circ \rho_{UV}) \circ r_U = h_V \circ r_V = h$. 由 h_U 的唯一性, 得到 $h_V \circ \rho_{UV} = h_U$. 于是相容同态族 (h_U) 通过余极限诱导环同态 $\tilde{h} : S^{-1}A \rightarrow B$, 满足 $\tilde{h} \circ \lambda = h$. 反之, 若环同态 $\tilde{h} : S^{-1}A \rightarrow B$ 满足 $\tilde{h} \circ \lambda = h$, 由 h_U 的唯一性, 它与各结构同态 $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow S^{-1}A$ 的复合必等于 h_U , 故 $\tilde{h}$ 唯一. $\square$



对 $a \in A$ 与 $s \in S$, 将 $S^{-1}A$ 中的元素 $\lambda(a)\lambda(s)^{-1}$ 记为分式 a/s . 余极限 $S^{-1}A$ 中的每个元素都由某个 $D(s)$ ($s \in S$) 上的正则函数代表; 由 $\mathcal{O}_X(D(s)) \simeq A[T]/(sT - 1)$, 该函数在 $S^{-1}A$ 中的像是关于 $\lambda(s)^{-1}$ 的多项式, 通分后可写成 a/s^n ($a \in A$). 因为 $s^n \in S$, 每个元素都有分式表示. 对 $a, b \in A, s, t \in S$, 加法与乘法满足 $a/s + b/t = (at + bs)/(st)$ 、 $(a/s)(b/t) = ab/(st)$. 若 A 是整环且 $0 \notin S$, 则 $S^{-1}A$ 可直接等同于分式域中的子环 $\{a/s : a \in A, s \in S\}$: 对任意环 B 及将 S 映为可逆元的环同态 $h : A \rightarrow B$, 在分式域中由 $a/s = a'/s'$ (即 $as' = a's$) 可推出 $h(a)h(s)^{-1} = h(a')h(s')^{-1}$, 故 $a/s \mapsto h(a)h(s)^{-1}$ 良定义且满足同一泛性质. 一般情况下, $\lambda : A \rightarrow S^{-1}A$ 未必单射: 若 $sa = 0$ 且 $s \in S$, 则 $\lambda(s)\lambda(a) = 0$; 因 $\lambda(s)$ 可逆, 必有 $\lambda(a) = 0$. 若 $0 \in S$, 则 $D(0) = \emptyset$ 是指标集的终项, 而 $\mathcal{O}_X(\emptyset) = 0$, 故局部化为零环.

对 $s \in A$, 取乘性集 $\{1, s, s^2, \dots\}$, 所得局部化记为 $A[1/s]$. 因对所有 $n \geq 1$ 都有 $D(s^n) = D(s)$, 该正向系有终项 $\mathcal{O}_X(D(s))$, 故 $A[1/s] \simeq \mathcal{O}_X(D(s)) \simeq A[T]/(sT - 1)$. 特别地, 第十四讲例 5.33 中的 $\mathbb{Z}[1/d]$ 就是使整数 d 可逆得到的局部化. 若 $\mathfrak{p} \subseteq A$ 为素理想, 则补集 $A \setminus \mathfrak{p}$ 为乘性集; 记 $A_{\mathfrak{p}} = (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A$, 称为 A 在素理想 $\mathfrak{p}$ 处的局部化.²

命题 5.68 (局部化与正则函数芽). 设 A 为环, $X = \operatorname{Spec} A$, $\mathfrak{p} \subseteq A$ 为素理想. 记 $\mathcal{O}_X$ 为第九讲构造的正则函数环层. 令 U 遍历 $\mathfrak{p}$ 的全部开邻域, 按反包含关系排序, 以限制同态为过渡同态, 则

$$A_{\mathfrak{p}} \simeq \varinjlim_{U \ni \mathfrak{p}} \mathcal{O}_X(U).$$

²局部化的标准泛性质及其正向极限描述见 The Stacks Project, Section 10.9, 尤其 Proposition 10.9.3 与 Lemma 10.9.9.

证明. 取乘性集 $S = A \setminus \mathfrak{p}$. 定义 $A_{\mathfrak{p}}$ 时所用的 $D(s) (s \notin \mathfrak{p})$ 正是 $\mathfrak{p}$ 的主开邻域, 它们构成邻域基. 只需证明, 改用全部开邻域不改变余极限.

设 B 为环, 给定与限制映射相容的一族环同态 $h_V : \mathcal{O}_X(V) \rightarrow B$, 其中 V 遍历 $\mathfrak{p}$ 的主开邻域. 对任意开邻域 U , 选 $\mathfrak{p} \in D(s) \subseteq U$, 令 $h_U(f) = h_{D(s)}(f|_{D(s)})$ ($f \in \mathcal{O}_X(U)$). 若另选 $D(t)$, 在共同的更小邻域 $D(st)$ 上比较, 便知相容性保证两个值相同. 同样可知, 这些 h_U 与全部开邻域之间的限制同态相容. 任何相容的延拓都必须满足上述公式, 故延拓唯一. 于是, 两种正向系到任意 B 的相容同态族自然一一对应, 由余极限的泛性质得到所述同构. $\square$

与例 5.65 中全纯函数芽的构造一样, 两个局部正则函数若在 $\mathfrak{p}$ 的某个更小邻域上相等, 就代表同一个正则函数芽. 因此 $A_{\mathfrak{p}}$ 就是 $\mathfrak{p}$ 处的正则函数芽环.

命题 5.69 (连续函数芽是函数环的局部化). 令 $R = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 为实直线上实值连续函数的环, 并记 $\mathfrak{m} = \{f \in R : f(0) = 0\}$. 在 0 处求值给出满环同态 $R \rightarrow \mathbb{R}$, 故 $\mathfrak{m}$ 为 R 的极大理想. 令 $I \subseteq R$ 为在 0 的某个邻域上恒为零的连续函数组成的理想. 则例 5.64 中的连续函数芽环 R/I 自然同构于局部化 $R_{\mathfrak{m}}$.

证明. 验证商同态 $R \rightarrow R/I$ 满足局部化的泛性质即可. 任取 $s \in R \setminus \mathfrak{m}$, 即 $s(0) \neq 0$. 由 s 的连续性, 存在整数 $n \geq 1$, 使 s 在闭区间 $K_n = [-1/n, 1/n]$ 上处处无零点. 将 K_n 上的连续函数 $x \mapsto 1/s(x)$ 按端点常值延拓到实直线, 得到 $g \in R$. 于是 $sg - 1 \in I$, 故 $(s + I)(g + I) = 1 + I$, 即 $s + I$ 可逆.

设 B 为环, 环同态 $h : R \rightarrow B$ 将每个在 0 处非零的连续函数都映为 B 中的可逆元. 任取 $f \in I$, 则存在 $\delta > 0$ 使 f 在 $[-\delta, \delta]$ 上恒为零. 连续函数 $\chi(x) = \max\{1 - |x|/\delta, 0\}$ 在区间外恒零, 而 f 在区间内恒零, 故 $\chi f = 0$. 又因 $\chi(0) = 1$, $h(\chi)$ 可逆, 由 $h(\chi)h(f) = 0$ 得 $h(f) = 0$. 因此 h 消去 I , 唯一通过 R/I 分解. 由局部化的泛性质即得 $R/I \simeq R_{\mathfrak{m}}$. $\square$

例 5.70 (正则函数芽与全纯函数芽). 设 t 为变量. 在 $\mathbb{C}[t]$ 中, (t) 是由在原点取值为零的多项式组成的极大理想. 对多项式 $q \in \mathbb{C}[t]$, $q \notin (t)$ 等价于 $q(0) \neq 0$, 所以局部化 $\mathbb{C}[t]_{(t)}$ 由所有分母在原点非零的有理函数 $p(t)/q(t)$ ($p, q \in \mathbb{C}[t]$, $q(0) \neq 0$) 组成. 每个这样的有理函数在 0 的某个开邻域内全纯, 从而给出自然环同态 $\mathbb{C}[t]_{(t)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}, 0} \simeq \mathbb{C}\{t\}$: 若 $p(t)/q(t)$ 在 0 处的芽为零, 则分子 $p(t)$ 在 0 的某个非空邻域上恒为零, 必为零多项式, 故该同态是单射.

但这个单射不是满射: 例如指数函数 e^t 在 0 处的全纯函数芽就不在该同态的像中. 否则存在 $p, q \in \mathbb{C}[t]$, $q(0) \neq 0$, 使 $q(t)e^t = p(t)$ 在 0 的某个邻域成立. 求导并消去 e^t , 得到 $p'q - pq' = pq$. 两边都是多项式, 在一个邻域上相等, 便处处相等. 这里 p, q 均非零, 但左侧为零或次数小于 $\deg p + \deg q$, 右侧次数却为 $\deg p + \deg q$, 矛盾.

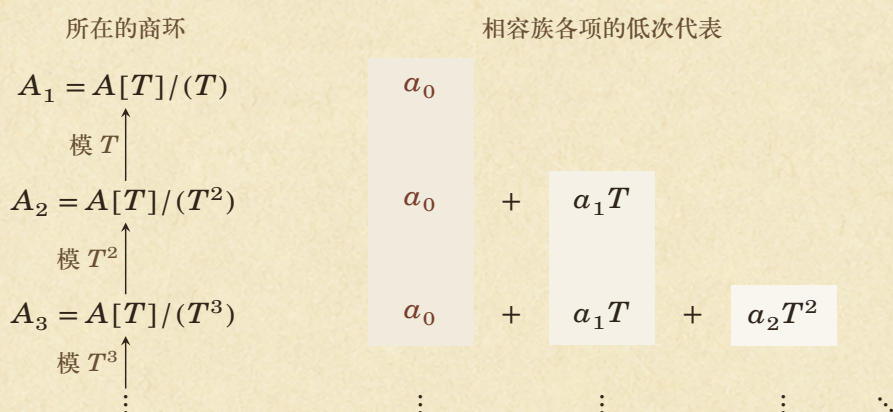
5.3.5 逆向极限与相容截断

形式幂级数和 p -进整数都可由全部有限阶截断恢复. 各阶截断须彼此相容: 高阶截断舍去高次项后, 应得到相应的低阶截断. 这些相容截断族组成逆向极限.

例 5.71 (形式幂级数由全部有限阶截断确定). 设 A 为环, T 为一个变量. 对整数 $n \geq 1$, 令 $A_n = A[T]/(T^n)$. 自然商同态 $A_{n+1} \rightarrow A_n$ 将剩余类 $P(T) \bmod T^{n+1}$ 映为 $P(T) \bmod T^n$ (即舍去 T^n 项), 组成 **CRing** 中的逆向系. 记 $A[[T]]$ 为系数在 A 中的形式幂级数环, 则将形式幂级数映为其各阶截断给出自然环同构

$$A[[T]] \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \geq 1} A[T]/(T^n), \quad \sum_{j \geq 0} a_j T^j \mapsto \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j T^j \bmod T^n \right)_n.$$

每个剩余类有唯一的次数小于 n 的代表多项式. 相容性保证第 j 个系数从第 $j+1$ 阶截断起不再改变, 故相容族与系数列 $(a_j)_{j \geq 0} \rightarrow$ 一一对应. 加法逐系数进行. 两个级数 $\sum_{j \geq 0} a_j T^j$ 、 $\sum_{j \geq 0} b_j T^j$ 乘积的第 j 项系数为有限和 $\sum_{r=0}^j a_r b_{j-r}$, 与先截断再相乘的结果一致, 故此双射是环同构.



由 A_{n+1} 映到 A_n 时舍去 T^n 项, 较低次的系数保持不变. 图中列出前三阶, 省略号表示全部更高阶. 知道每一阶截断, 就能依次读出系数 $(a_j)_{j \geq 0}$.

当 $A = \mathbb{C}$ 时, 每个全纯函数芽的 Taylor 级数都给出相容截断族, 反过来却未必. 例如 $\sum_{j \geq 0} j! T^j$ 的每个有限截断都是多项式, 且截断彼此相容. 但代入任意非零复数 T 后, 相邻两项的绝对值之比为 $(j+1)|T|$, 最终大于 2, 通项不趋于零, 故级数发散. 所以 $\mathbb{C}\{T\}$ 是 $\mathbb{C}[[T]]$ 的真子环. 截断相容保证我们得到一个形式幂级数; 要得到全纯函数芽, 还需要它在某个正半径圆盘内收敛.

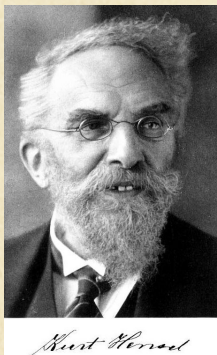
例 5.72 (p -进整数的相容剩余类). 设 p 为素数, 沿用第二讲的 p -进整数环 $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$. 对整数 $n \geq 1$, 约化同态 $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 将整数模 p^{n+1} 的剩余类映为模 p^n 的剩余类, 构成逆向系 $\cdots \rightarrow \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. 我们有自然环同构 $\mathbb{Z}_p \simeq \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. 具体而言, 任取 $x \in \mathbb{Z}_p$, 写出其 p -进展开 $x = \sum_{j \geq 0} a_j p^j$, 其中各位数字 a_j 为满足 $0 \leq a_j < p$ 的整数. 将部分和模去 p^n , 便得到逆向极限中的相容族 $(\sum_{j=0}^{n-1} a_j p^j \bmod p^n)_{n \geq 1}$. 反过来, 模 p 的剩余类确定 a_0 . 已知前 n 位后, 模 p^{n+1} 的

剩余类又唯一确定下一位 a_n . 这样逐位得到的级数 $\sum_{j \geq 0} a_j p^j$ 在 $\mathbb{Z}_p$ 中收敛, 且两个 p -进整数 x, y 的所有阶截断相同等价于对所有 $n \geq 1$ 都有 $|x - y|_p \leq p^{-n}$, 即 $x = y$. 由于 $x - \sum_{j=0}^{n-1} a_j p^j \in p^n \mathbb{Z}_p$, 逐级模 p^n 约化保持加法、乘法与么元, 故此双射是环同构.

给每个商环 $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ 离散拓扑, 并在逆向极限上取乘积拓扑诱导的子空间拓扑. 固定前 n 位数字的集合对应于 $\mathbb{Z}_p$ 中的球 $x + p^n \mathbb{Z}_p = \{y \in \mathbb{Z}_p : |y - x|_p \leq p^{-n}\}$. 这些集合与相应的球分别构成两边的拓扑基, 故上述同构也是同胚.

〔史略〕 Hensel: 从幂级数到 p -进数

Hensel 在 1897 年的论文中, 尝试把函数在一点附近展开成幂级数的方法用于数论. 他写下按素数 p 的幂次排列的展开式, 并用模 p 的高次幂的同余来研究这些展开.



Im allgemeinen schreiten alle diese Entwicklungen nach Potenzen von p mit ganzzahligen Exponenten fort, d. h. sie können folgendermaßen geschrieben werden:

$$(1) \quad X = \frac{A_{-h}}{p^h} + \cdots + \frac{A_{-1}}{p} + A_0 + A_1 p + \cdots;$$

für diese Zahlen erhält man also genau dieselben Entwicklungen wie für eine algebraische Function in der Umgebung einer regulären Stelle.

左: Kurt Hensel (1861–1941). 右: 1897 年论文第 84 页的素数幂展开(局部).³

今天可以用逆向极限来表述这个类比. 幂级数模 T^n 给出前 n 个系数, p -进整数模 p^n 给出前 n 位数字. 各阶截断必须相容; 知道全部截断, 也就能依次恢复全部系数或数字.

例 5.73 (递增区域上的全纯函数). 设 $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$ 为复平面中的一列递增开集, 令 $U = \bigcup_{n \geq 1} U_n$. 对开集 $V \subseteq \mathbb{C}$, 仍记 $\mathcal{O}(V)$ 为 V 上的全纯函数环. 限制同态 $\mathcal{O}(U_{n+1}) \rightarrow \mathcal{O}(U_n)$ 的方向与包含相反, 构成逆向系, 将 U 上的函数限制到各 U_n , 得到环同构

$$\mathcal{O}(U) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathcal{O}(U_n), \quad f \mapsto (f|_{U_n})_{n \geq 1}.$$

这里的相容族是满足 $f_n \in \mathcal{O}(U_n)$, $f_{n+1}|_{U_n} = f_n$ 的函数列 $(f_n)_{n \geq 1}$. 对任意 $z \in U$, 任取包含 z 的 U_n 并定义 $f(z) = f_n(z)$. 相容性保证定义与选择无关. 在每个 U_n 上, f 就是全纯函数 f_n , 故它在整个 U 上全纯. 这给出了限制映射的逆, 并保持环运算.

特别地, 取半径递增的开圆盘 $U_n = \{z : |z| < n\}$, 就得到整函数环(即整个复平面上的全纯函数环)的逆向极限表示 $\mathcal{O}(\mathbb{C}) \simeq \varprojlim_n \mathcal{O}(U_n)$. 求芽时缩小邻域; 这里扩大圆盘, 由相容的限制恢复整个平面上的函数.

³肖像约摄于 1925 年, 来源为马尔堡大学, 见 [Wikimedia Commons](#) 原图. 书影: K. Hensel, *Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen*, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 6 (1897), 83–88; 幂级数类比与素数幂展开见原刊第 83–84 页, 哥廷根大学图书馆数字藏本.

5.3.6 环的推出与标量扩张

给定环同态 $A \rightarrow B$ 与 $A \rightarrow C$, 求它们的推出时 (见第十四讲定义 5.26), 还要考虑来自两边的元素如何相乘. 在张量积 $B \otimes_A C$ 中, $b \otimes 1$ 与 $1 \otimes c$ 的乘积可以定义为 $b \otimes c$. 将这个规则推广到任意纯张量, 便得到下面的环结构.

命题 5.74 (环的张量积是推出). 设 A, B, C 为环, $\varphi : A \rightarrow B, \psi : A \rightarrow C$ 为环同态. 通过 φ, ψ 分别把 B, C 视为 A -模. 模的张量积 $B \otimes_A C$ 上存在唯一与原有加法相容的环结构, 其么元为 $1 \otimes 1$, 且对任意 $b, b' \in B, c, c' \in C$ 满足 $(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$. 它连同环同态 $B \rightarrow B \otimes_A C (b \mapsto b \otimes 1)$ 及 $C \rightarrow B \otimes_A C (c \mapsto 1 \otimes c)$, 是 φ, ψ 在环范畴 **CRing** 中的推出.

证明. 记 $Q = B \otimes_A C$. 固定 $b \in B, c \in C$, 映射 $B \times C \rightarrow Q, (b', c') \mapsto bb' \otimes cc'$ 是 A -双线性的, 故诱导 A -线性映射 $\mu_{b,c} : Q \rightarrow Q$. 而映射 $B \times C \rightarrow \text{Hom}_A(Q, Q), (b, c) \mapsto \mu_{b,c}$ 也是 A -双线性的, 再次用张量积的泛性质, 得到 $Q \rightarrow \text{Hom}_A(Q, Q)$, 也就定义了所需的双线性乘法. 分配律来自双线性; 结合律、交换律与么元律只需在纯张量上用 B, C 的环公理检验. 纯张量加法生成整个 Q , 故满足给定公式的乘法唯一. 两个结构映射 $b \mapsto b \otimes 1$ 与 $c \mapsto 1 \otimes c$ 均为环同态, 且由张量积中的关系 $\varphi(a) \otimes 1 = 1 \otimes \psi(a)$ ($a \in A$) 可知它们分别与 φ, ψ 的复合相等.

再验证推出的泛性质. 设 D 为环, $r : B \rightarrow D$ 与 $s : C \rightarrow D$ 为满足 $r \circ \varphi = s \circ \psi : A \rightarrow D$ 的环同态. 通过这个共同的复合同态把 D 视为 A -模, 则映射 $B \times C \rightarrow D, (b, c) \mapsto r(b)s(c)$ 是 A -双线性的, 故诱导线性映射 $h : B \otimes_A C \rightarrow D$, 满足 $h(b \otimes c) = r(b)s(c)$. 由于 D 交换, h 在纯张量上保持乘法, 再由加法性推广到全部元素. 它又将 $1 \otimes 1$ 送到 1, 故是环同态, 与两个结构映射的复合分别等于 r, s . 由 $b \otimes c = (b \otimes 1)(1 \otimes c)$, 任何满足要求的环同态在纯张量上都必须这样取值, 故 h 唯一. $\square$

对环 A , 记 $A\text{-Alg}$ 为 A -代数的范畴: 对象是带有结构同态 $A \rightarrow C$ 的环 C , 态射是与结构同态相容的环同态.

设 $\varphi : A \rightarrow B$ 为环同态. 对 A -代数 C , 赋予 $B \otimes_A C$ 上一命题的环结构, 以 $b \mapsto b \otimes 1$ 为其 B -代数结构同态. 对 A -代数同态 $v : C \rightarrow C'$, 取诱导同态 $\text{id}_B \otimes v : B \otimes_A C \rightarrow B \otimes_A C'$. 在纯张量上计算可知, 它保持乘法与 B -代数结构, 而且这一对应保持恒等与复合, 故给出标量扩张函子 $B \otimes_A - : A\text{-Alg} \rightarrow B\text{-Alg}$. 限制标量函子 Res_A^B 则把结构同态 $B \rightarrow D$ 与 φ 复合为 $A \rightarrow D$, 在态射上保持原映射.

命题 5.75 (代数中的标量扩张伴随). 上述两个函子构成伴随对 $(B \otimes_A -) \dashv \text{Res}_A^B$. 具体而言, 对 A -代数 C 及 B -代数 D , 有关于 C, D 的自然双射

$$\text{Hom}_{B\text{-Alg}}(B \otimes_A C, D) \simeq \text{Hom}_{A\text{-Alg}}(C, D),$$

右侧的 D 按限制标量视为 A -代数. 因此标量扩张函子保持已有的余极限, 特别是推出与正向极限.

证明. 记 $\eta : B \rightarrow D$ 为 D 的 B -代数结构同态. 由命题 5.74, 双射的一个方向是与 $C \rightarrow B \otimes_A C, c \mapsto 1 \otimes c$ 复合; 另一个方向将 A -代数同态 $h : C \rightarrow D$ 送到 B -代数同态 $B \otimes_A C \rightarrow D, b \otimes c \mapsto \eta(b)h(c)$. 两个构造互逆, 并与源中的前复合、目标中的后复合相容, 故双射自然.

保持余极限的结论来自定理 5.38. 例如, 设 I 为有向集, $(C_i)_{i \in I}$ 为 A -代数的正向系, 过渡同态均为 A -代数同态. 按命题 5.63 构造的正向极限环 $\varinjlim_i C_i$ 带有各 $A \rightarrow C_i$ 诱导的 A -代数结构, 并在 $A\text{-Alg}$ 中满足余极限的泛性质, 因此有自然同构 $B \otimes_A \varinjlim_i C_i \simeq \varinjlim_i (B \otimes_A C_i)$. 将有向集换成滤过小范畴(见第 3 页“选读: 一般滤过指标”), 结论仍然成立. $\square$

例 5.76 (两个商环的张量积). 设 A 为环, $I, J \subseteq A$ 为理想, 通过自然商同态将 A/I 与 A/J 视为 A -代数. 第十四讲例 5.48 的商公式给出 $(A/I) \otimes_A (A/J) \simeq A/(I+J)$. 该映射将 $(a+I) \otimes (b+J)$ 送到 $ab + (I+J)$, 保持乘法, 故也是环同构. 特别地, $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_3 = 0$. 这也可以直接从泛性质看出: 若一个环同时接收来自这两个环的同态, 就同时有 $2=0, 3=0$, 从而 $1=0$.

例 5.77 (整数系数方程的约化). 设 p 为素数, T 为变量, 记 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, 令 $C = \mathbb{Z}[T]/(T^2+1)$. 通过整数环的自然同态将 $\mathbb{F}_p$ 与 C 视为 $\mathbb{Z}$ -代数. 由第十四讲的张量积商公式, 结合纯张量的乘法, 得到环同构

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} C \simeq C/pC \simeq \mathbb{Z}[T]/(p, T^2+1) \simeq \mathbb{F}_p[T]/(T^2+1).$$

最后一步把每个系数对 p 取模, 关系 $T^2+1=0$ 也随之取模. 在这个例子中, 与 $\mathbb{F}_p$ 作张量积, 就是把原来的整数系数方程变成有限域上的方程.

习题

- (1) 连续函数的拼接. 对非空有界闭区间 $K \subseteq \mathbb{R}$, 记 $C(K)$ 为 K 上的复值连续函数环, 运算逐点进行. 对 $f \in C(K)$, 令 $\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$. 设 $0 < c < 1$, 以在 c 处求值作为 $C([0, c])$ 与 $C([c, 1])$ 到 $\mathbb{C}$ 的环同态. 证明限制映射给出环同构

$$C([0, 1]) \longrightarrow C([0, c]) \times_{\mathbb{C}} C([c, 1]), \quad f \mapsto (f|_{[0, c]}, f|_{[c, 1]}),$$

其中右侧由满足 $g(c) = h(c)$ 的函数对 (g, h) 组成, 运算逐坐标进行. 证明此映射还满足 $\|f\|_\infty = \max\{\|f|_{[0, c]}\|_\infty, \|f|_{[c, 1]}\|_\infty\}$.

- (2) 中国剩余定理与纤维积. 设 A 为环, I, J 为 A 的理想. 自然商同态 $A/I \rightarrow A/(I+J)$ 与 $A/J \rightarrow A/(I+J)$ 的纤维积为

$$(A/I) \times_{A/(I+J)} (A/J) = \{(a+I, b+J) : a, b \in A, a-b \in I+J\},$$

环运算逐坐标进行. 证明 $a+(I \cap J) \mapsto (a+I, a+J)$ 给出从 $A/(I \cap J)$ 到此纤维积的环同构. 由此计算 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, 其中到 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的两个同态均为模 2 约化, 并写出同构映射. 当 $I+J=A$ 时, 由此推出中国剩余定理 $A/(I \cap J) \simeq A/I \times A/J$.

- (3) 递增理想与正向极限. 设 A 为环, $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ 为 A 的一系列理想, 令 $I = \bigcup_{n \geq 1} I_n$. 证明 I 是理想, 且 A/I 连同自然商同态 $A/I_n \rightarrow A/I$ 是正向系

$$A/I_1 \longrightarrow A/I_2 \longrightarrow \dots, \quad a+I_n \mapsto a+I_{n+1}$$

在环范畴中的余极限. 设 k 为域, $X_1, X_2, \dots$ 为一列变量, 取 $A = k[X_1, X_2, \dots]$, $I_n = (X_1, \dots, X_n)$. 计算 $\varinjlim_n A/I_n$, 并证明每个结构同态 $A/I_n \rightarrow \varinjlim_n A/I_n$ 都不是单射.

- (4) 局部化的计算. 对环 A 及 $s \in A$, 局部化 $A[1/s]$ 带有自然同态 $\lambda : A \rightarrow A[1/s]$, 使 $\lambda(s)$ 可逆, 且任一将 s 映为可逆元的环同态 $A \rightarrow B$ 都唯一通过 λ 分解. 令 $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, 分别计算 $A[1/2]$ 与 $A[1/6]$, 其中 2, 6 表示相应整数在 A 中的剩余类. 写出各自然同态及其核, 并用上述泛性质验证结果.

- (5) 函数芽与点值. 记 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}, 0}$ 为原点处的全纯函数芽环: 元素为二元组 (U, f) 的等价类 $[U, f]$, 其中 $U \subseteq \mathbb{C}$ 是原点的开邻域, f 在 U 上全纯; 两个代表在原点的某个公共开邻域上相等时等价. 环运算在公共邻域上逐点进行. 记 t 为坐标函数 $z \mapsto z$ 的芽. 证明 $[U, f]$ 可逆当且仅当 $f(0) \neq 0$, 并证明求值同态 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}, 0} \rightarrow \mathbb{C}$, $[U, f] \mapsto f(0)$ 的核为主理想 (t) . 由此证明 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}, 0}$ 是局部环, 即只有一个极大理想的环, 并求它对该极大理想的商环(称为剩余域). 举出两个在原点取值相同、但在原点的芽不同的全纯函数.

- (6) 收敛幂级数与相容截断. 记 $R = \mathbb{C}\{T\}$ 为在原点附近收敛的复系数幂级数环: 其元素为 $\sum_{j \geq 0} a_j T^j$, 其中 $a_j \in \mathbb{C}$, 且存在 $r > 0$ 使 $\sum_{j \geq 0} |a_j| r^j < \infty$. 加法逐项进行; 两个级数 $\sum_{j \geq 0} a_j T^j$ 与 $\sum_{j \geq 0} b_j T^j$ 的乘积中, T^m 的系数为 $\sum_{j=0}^m a_j b_{m-j}$. 对每个整数 $n \geq 1$, 证明截断映射

$$R \longrightarrow \mathbb{C}[T]/(T^n), \quad \sum_{j \geq 0} a_j T^j \longmapsto \sum_{j=0}^{n-1} a_j T^j \bmod T^n$$

是满环同态, 核为 $T^n R$. 以自然商同态 $R/T^{n+1}R \rightarrow R/T^n R$ 为过渡映射, 求 $\varprojlim_{n \geq 1} R/T^n R$, 并写出同构映射. 证明自然同态 $R \rightarrow \varprojlim_{n \geq 1} R/T^n R$, $f \mapsto (f + T^n R)_{n \geq 1}$ 单射但不满射; 给出一个不在其像中的相容族.

- (7) 环与代数的余积. 设 A 为环, B, C 为带有指定结构同态 $\varphi: A \rightarrow B, \psi: A \rightarrow C$ 的 A -代数. 在 $B \otimes_A C$ 上取由 $(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$ 确定的环结构, 么元为 $1 \otimes 1$, 结构同态为 $a \mapsto \varphi(a) \otimes 1 = 1 \otimes \psi(a)$. 证明 $B \otimes_A C$ 连同 $b \mapsto b \otimes 1$ 与 $c \mapsto 1 \otimes c$ 是 B, C 在 A -代数范畴中的余积. 取 $A = \mathbb{Z}$, 说明它给出任意两个环在环范畴中的余积. 再设 k 为域, X, Y 为变量, 计算 $k[X] \otimes_k k[Y]$, 并写出同构对纯张量的作用公式.

- (8) 基变换与张量积计算. 本题各张量积均取纯张量逐因子相乘的环结构. 设 A, B 为环, $f: A \rightarrow B$ 为环同态, $I \subseteq A$ 为理想. 通过 f 及自然商同态把 B 与 A/I 视为 A -代数, 记 IB 为 $f(I)$ 在 B 中生成的理想. 证明映射 $b \otimes (a + I) \mapsto bf(a) + IB$ 给出环同构 $B \otimes_A (A/I) \simeq B/IB$. 由此计算 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, 并写出同构对纯张量的作用公式.