

6.1 第 16 讲 张量积、纤维与余切空间

多项式 $T^2 + 1$ 在 $\mathbb{R}$ 中没有根, 在 $\mathbb{C}$ 中却分解为 $(T - i)(T + i)$. 这种分解怎样反映在环及其谱上? 从 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 的计算开始, 我们把张量积与多项式的根联系起来.

6.1.1 多项式分解与张量积

第 15 讲的命题 5.74 说明: 对 A -代数 B, C , 模的张量积 $B \otimes_A C$ 上的乘法由 $(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$ 给出. 当 $B = A[T]/(P)$ 时, 下面的引理把这个张量积写成 C 上的多项式商环.

引理 6.1. 设 $A \rightarrow C$ 为环同态, $P \in A[T]$. 对 $f \in A[T]$, 将其系数在 C 中的像组成的多项式仍记为 f , 并以 $\bar{f}$ 表示它在相应商环中的像. 则有 C -代数同构

$$(A[T]/(P)) \otimes_A C \simeq C[T]/(P), \quad \bar{f} \otimes c \mapsto c\bar{f}.$$

证明. 同态 $A[T] \rightarrow C[T]/(P)$ 将 P 映为零, 故诱导商环同态 $\bar{f} \mapsto \bar{f}$. 所示公式对两个因子分别可加, 且对 $a \in A$ 有 $c\bar{a}\bar{f} = (ac)\bar{f}$, 故由张量积的泛性质给出加法同态; 纯张量的乘法公式又保证它保持乘法. 逆映射将 $c \in C$ 送到 $1 \otimes c$, 将 T 送到 $\bar{T} \otimes 1$. 将 P 的系数在张量积的两因子间移换, 得 $P(\bar{T} \otimes 1) = \overline{P(T)} \otimes 1 = 0$, 故逆映射在商环上有定义. 两个复合固定相应代数的生成元, 故均为恒等映射. $\square$

以下计算还会用到多项式在互异根处的取值.

引理 6.2. 设 L 为域, $r_1, \dots, r_n \in L$ 两两不同, $P(T) = \prod_{j=1}^n (T - r_j)$. 取值同态给出 L -代数同构

$$L[T]/(P) \simeq \underbrace{L \times \cdots \times L}_{n \uparrow}, \quad \bar{f} \mapsto (f(r_1), \dots, f(r_n)).$$

证明. 对 $i \neq j$, $(T - r_i) - (T - r_j) = r_j - r_i$ 是单位, 故理想 $(T - r_i)$ 与 $(T - r_j)$ 互素. 由中国剩余定理 2.18, 商环分解为各 $L[T]/(T - r_j) \simeq L$ 的乘积; 相应映射就是在各根处取值. $\square$

例 6.3. 在 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 上规定复数数乘为 $c \cdot (z \otimes w) = z \otimes (cw)$, 其中 $c, z, w \in \mathbb{C}$, 从而把它看作 $\mathbb{C}$ -代数. 由 $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}[T]/(T^2 + 1)$ 及前两个引理,

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}[T]/(T^2 + 1) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

最后一个同构是在 $i, -i$ 处取值. 若 $z = a + bi$, 则第一个因子中的 z 对应多项式 $a + bT$, 所以复合映射为

$$z \otimes w \mapsto (zw, \bar{z}w).$$

右端两个 $\mathbb{C}$ 分别对应保持 $\mathbb{R}$ 不动的恒等同态与复共轭同态. 乘法映射 $z \otimes w \mapsto zw$ 是这个乘积的第一投影, 因而不是同构.

例 6.4. 令 $\alpha = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$, 并取三次单位根 $\zeta = e^{2\pi i/3}$, 即 $\zeta^3 = 1$ 且 $\zeta \neq 1$. 多项式 $T^3 - 2$ 没有有理根, 故在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 从而 $\mathbb{Q}(\alpha) \simeq \mathbb{Q}[T]/(T^3 - 2)$. 在 $\mathbb{C}$ 中, 这个多项式的三个根为 $\alpha, \zeta\alpha, \zeta^2\alpha$. 于是

$$\mathbb{Q}(\alpha) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}[T]/(T^3 - 2) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

若 $\sigma_j : \mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ 是由 $\sigma_j(\alpha) = \zeta^j\alpha$ 确定的嵌入, 则该同构将 $b \otimes z$ 送到 $(\sigma_0(b)z, \sigma_1(b)z, \sigma_2(b)z)$.

$\text{Spec } \mathbb{Q}(\alpha)$ 只有一个点; 标量扩张到 $\mathbb{C}$ 后, 其谱为 $\text{Spec } \mathbb{C} \sqcup \text{Spec } \mathbb{C} \sqcup \text{Spec } \mathbb{C}$, 三个点分别对应上述三个嵌入.

6.1.2 谱映射的纤维

复抛物线 $y^2 = x$ 上哪些点投影到 $x = a \in \mathbb{C}$? 将 x 换成 a , 只需解 $y^2 = a$; 相应的坐标环是 $\mathbb{C}[y]/(y^2 - a)$. 在环的语言中, 这一步是沿取值同态 $\mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto a$ 作张量积.

一般地, 环同态 $\varphi : A \rightarrow B$ 给出谱映射 $\mathfrak{q} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. 要研究映到 $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ 的点, 就用第 9 讲的取值同态 $A \rightarrow \kappa(\mathfrak{p})$, 其中 $\kappa(\mathfrak{p}) = \text{Frac}(A/\mathfrak{p})$. 元素 $a \in A$ 作为函数在 $\mathfrak{p}$ 处的值, 是它在这个剩余域中的像.

定义 6.5. 设 $\varphi : A \rightarrow B$ 为环同态, $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. 仿射概形

$$\text{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}))$$

称为 $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ 在 $\mathfrak{p}$ 处的纤维(fibre).

命题 6.6. 设 $\varphi : A \rightarrow B$ 为环同态, $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. 同态 $B \rightarrow B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ 诱导的谱映射, 将纤维的点与下列素理想一一对应:

$$\{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B : \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}\}.$$

这个对应是纤维的底层拓扑空间到右端子空间的同胚.

证明. 在 B 中先令 $\varphi(\mathfrak{p})$ 的元素为零, 再使 $\varphi(A \setminus \mathfrak{p})$ 的元素可逆, 得到

$$B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \simeq S^{-1}(B/\mathfrak{p}B), \quad S = \{\varphi(a) + \mathfrak{p}B : a \in A \setminus \mathfrak{p}\}.$$

这里 $\mathfrak{p}B$ 表示由 $\varphi(\mathfrak{p})$ 生成的理想. 同构由两端相同的泛性质给出: 从任一端到环 R 的同态, 都是使 $\varphi(\mathfrak{p})$ 变为零、使 $\varphi(A \setminus \mathfrak{p})$ 变为单位的 $B \rightarrow R$.

由命题 2.17, 商环 $B/\mathfrak{p}B$ 的素理想对应包含 $\mathfrak{p}B$ 的素理想 $\mathfrak{q} \subseteq B$. 局部化又要求 $\mathfrak{q}$ 不含任何 $\varphi(a)$, 其中 $a \notin \mathfrak{p}$. 两个条件合起来恰为 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. 具体地, 若 $\mathfrak{r}$ 是 $B/\mathfrak{p}B$ 中避开 S 的素理想, 则分式同态 $S^{-1}(B/\mathfrak{p}B) \rightarrow \text{Frac}((B/\mathfrak{p}B)/\mathfrak{r})$ 的核恰为 $S^{-1}\mathfrak{r}$, 故后者是素理想. 反之, 对局部化中的素理想 $\mathfrak{q}'$, 分母均为单位, 所以 $c/s \in \mathfrak{q}'$ 当且仅当 $c/1 \in \mathfrak{q}'$, 其中 $c \in B/\mathfrak{p}B, s \in S$. 由此, 取逆像与理想的扩张互逆. 最后, $S^{-1}(B/\mathfrak{p}B)$ 中每个元素都可写成 $\bar{b}/s$, 其中 $b \in B, \bar{b} = b + \mathfrak{p}B$. 基本开集 $D(\bar{b}/s)$ 对应 $D(b)$ 与右端集合的交, 因此这个双射及其逆均连续. $\square$

纤维的点集是谱映射下的原像. 它的坐标环 $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ 还包含点的剩余域、幂零元等信息; 这些信息不能仅由点数决定.

例 6.7. 考虑复抛物线 $y^2 = x$, 其坐标环为 $B = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x)$. 沿 x 坐标的投影对应 $\mathbb{C}$ -代数同态 $\mathbb{C}[t] \rightarrow B, t \mapsto x$. 在点 $t = a \in \mathbb{C}$ 处, 沿取值同态 $t \mapsto a$ 作张量积, 由张量积的商公式 4.29 得

$$B \otimes_{\mathbb{C}[t]} \mathbb{C} \simeq B/(x - a) \simeq \mathbb{C}[y]/(y^2 - a).$$

若 $a \neq 0$, 选择 $b \in \mathbb{C}$ 使 $b^2 = a$, 便由引理 6.2 得到 $\mathbb{C}[y]/(y^2 - a) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, 对应 $(a, b), (a, -b)$ 两点. 若 $a = 0$, 则得到 $\mathbb{C}[y]/(y^2)$. 它只有一个素理想 $(\bar{y})$, 但其中 $\bar{y} \neq 0$ 且 $\bar{y}^2 = 0$, 所以这个环不与 $\mathbb{C}$ 同构.

同一条抛物线沿 y 坐标投影, 则对应 $\mathbb{C}$ -代数同态 $\mathbb{C}[t] \rightarrow B, t \mapsto y$. 此时在 $t = a$ 处, 张量积为 $B \otimes_{\mathbb{C}[t]} \mathbb{C} \simeq B/(y - a) \simeq \mathbb{C}[x]/(x - a^2) \simeq \mathbb{C}$. 两个投影的像都是整条复直线, 纤维却不同: 沿 y 坐标投影, 每个 a 上方恰有一点 (a^2, a) ; 沿 x 坐标投影则有前述两种情形.

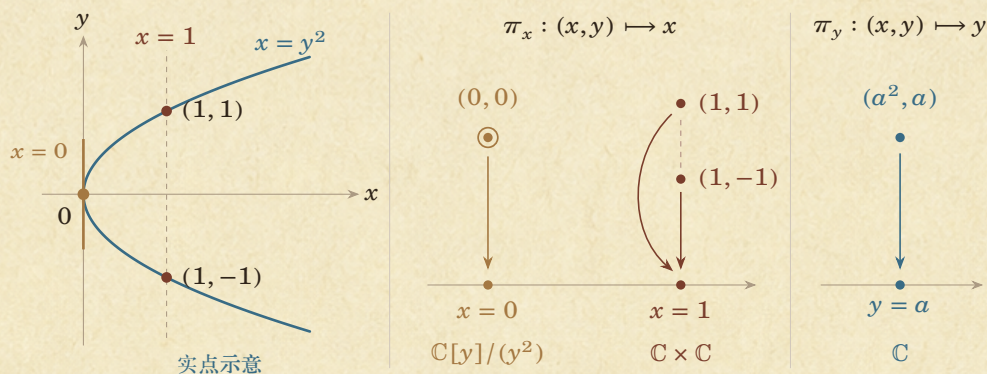


图 6.1: 左为抛物线的实点示意; 中、右分别表示沿 x, y 坐标的投影. 箭头下方列出纤维的坐标环, 均在 $\mathbb{C}$ 上计算.

例 6.8. 包含同态 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[T]/(T^2 + 1)$ 给出 $\text{Spec } \mathbb{Z}[i] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$. 设 p 为素数, 闭点 (p) 的剩余域为 $\mathbb{F}_p$, 故其上方纤维的坐标环为

$$\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \simeq \mathbb{F}_p[T]/(T^2 + 1).$$

取 $p = 5, 3, 2$, 这三个素数给出三种不同情形:

- (1) $p = 5$ 时, $T^2 + 1 = (T - 2)(T + 2)$, 所以 $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_5 \simeq \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$, 纤维有两个点.
- (2) $p = 3$ 时, $T^2 + 1$ 在 $\mathbb{F}_3$ 中没有根, 所以 $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_3 \simeq \mathbb{F}_9$, 纤维只有一个点, 其剩余域为九元域 $\mathbb{F}_9$.
- (3) $p = 2$ 时, $T^2 + 1 = (T + 1)^2$. 以 ϵ 表示 $T + 1$ 的像, 则 $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_2 \simeq \mathbb{F}_2[\epsilon]/(\epsilon^2)$. 它的谱也只有一个点, 但环中含有非零且平方为零的元素 ϵ .

第 5 讲例 2.21 已证明: 对奇素数 p , -1 在 $\mathbb{F}_p$ 中是平方当且仅当 $p \equiv 1 \pmod{4}$. 因此

$$\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \simeq \begin{cases} \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p, & p \equiv 1 \pmod{4}, \\ \mathbb{F}_{p^2}, & p \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

在泛点 (0) 处, 剩余域是 $\mathbb{Q}$, 而 $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}(i)$.

6.1.3 平方根的黎曼面

在 $\mathbb{C}^\times$ 上连续选择平方根, 会遇到一个具体障碍. 令 $z(t) = re^{it}$, 其中 $r > 0$, 并从 $w(0) = \sqrt{r}$ 开始连续选择根, 则 $w(t) = \sqrt{r}e^{it/2}$. 当 z 绕原点一周时, $w(2\pi) = -w(0)$; 再绕一周, 平方根才回到原值. 因此, $z \mapsto \sqrt{z}$ 不能在穿孔复平面上成为单值全纯函数.

把两个可能的值都保留下来, 考虑

$$S = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = z\}, \quad \pi : S \rightarrow \mathbb{C}, \quad (z, w) \mapsto z.$$

S 由 $w \mapsto (w^2, w)$ 参数化, 本身就是一张复平面. 对 $z \neq 0$, 取以 z 为中心且不含原点的圆盘, 在其中可以选出两个全纯平方根; 圆盘在 S 中的原像分成两片, 各自经 π 全纯同构地映到圆盘. 在 $z = 0$ 处, 两根重合, π 的局部形式为 $w \mapsto w^2$. 称 0 为 π 的分支值(branch value), 称其上方的点为分歧点(ramification point).

下图取 $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \operatorname{Re} w)$ 为三维坐标, 用颜色表示第四个坐标 $\operatorname{Im} w$.¹ 例如在 $z = -a < 0$ 上方, $w = \pm i\sqrt{a}$ 是两个不同的点; 三维投影重合, 用颜色区分.

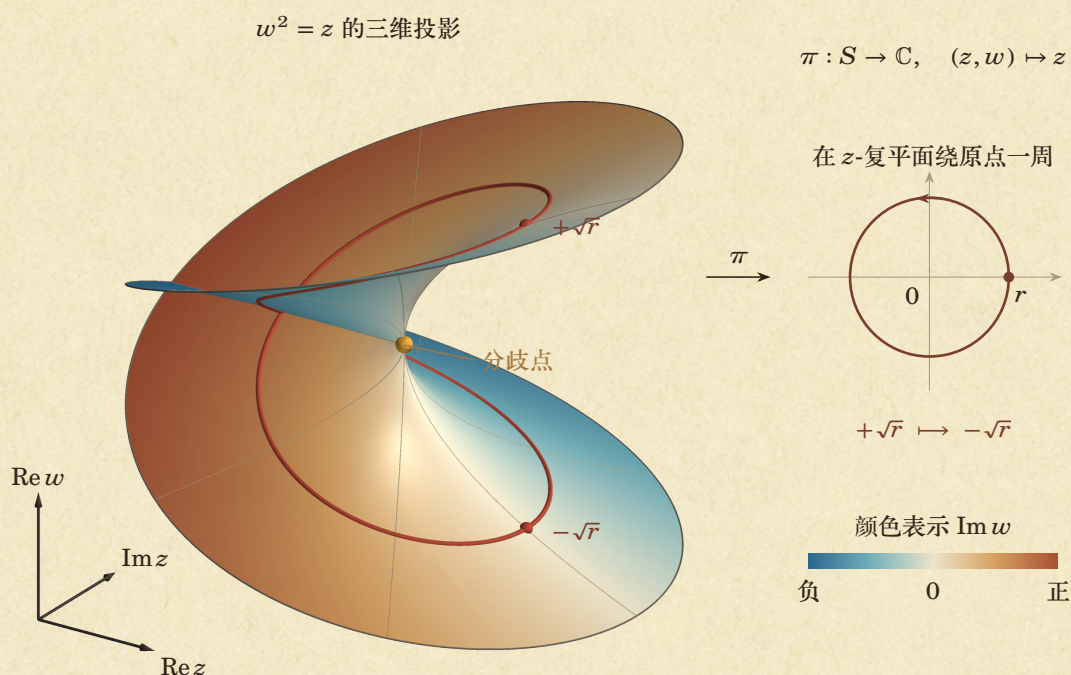


图 6.2: 平方根的黎曼面. 左图红色闭路经 π 映到 z -复平面, 绕原点两周; 走过一半时, 从 $+\sqrt{r}$ 到达 $-\sqrt{r}$. 金色圆点表示 $(z, w) = (0, 0)$.

也可以把 z -复平面沿一条从 0 到无穷远的射线剪开, 在两份剪开的平面上各选一个平方根, 再把一份的切口上岸与另一份的下岸相接. 沿切口交叉粘合并补入原点上方的一点, 就得到 S .

若给 z -复平面与 S 都补上无穷远点, 就得到两个黎曼球面之间的映射. 在无穷远处取坐标 $u = 1/z$, $v = 1/w$, 方程仍为 $u = v^2$, 故 ∞ 是另一个分支值.

¹这种三维投影与颜色相结合画法参见 D. Arapura, *Visualizing Elliptic Curves*, 第 1, 6 页; 绕行与两叶交换的图解参见 R. Rosales, *Riemann Surfaces: The Square Root*, MIT 18.04, 1999. 本讲曲面按方程重新绘制.

6.1.4 从椭圆弧长到三次方程

设椭圆的长、短半轴分别为 $a > b > 0$, 取参数 $X = a \sin \theta$, $Y = b \cos \theta$, 并令 $\lambda = 1 - b^2/a^2 \in (0, 1)$. 取 $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, 从顶点 $(0, b)$ 到参数为 φ 的点, 其弧长为

$$s(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - \lambda \sin^2 \theta} d\theta.$$

记 $E(\varphi | \lambda) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \lambda \sin^2 \theta} d\theta$, 称为第二类椭圆积分. 于是 $s(\varphi) = aE(\varphi | \lambda)$, 整条椭圆的周长为 $4aE(\pi/2 | \lambda)$. “椭圆积分”这一名称便来自椭圆弧长的计算.

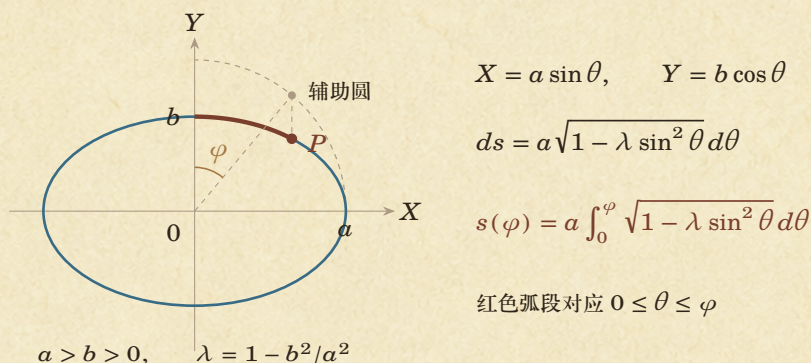


图 6.3: 椭圆弧长与参数角. 终点对应的参数角 φ 标在辅助圆上.

与 E 同属这套理论的第一类椭圆积分为

$$F(\varphi | \lambda) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \lambda \sin^2 \theta}}.$$

把积分值 $u = F(\varphi | \lambda)$ 当作变量, 就可以反过来研究 $\sin \varphi$ 随 u 的变化. 这与从 $u = \int_0^t ds/\sqrt{1-s^2}$ 反求 $t = \sin u$ 的思路相同; 区别在于复变量中的反函数具有两个独立周期.

〔史略〕 从积分的整理到反演

勒让德系统整理含三次、四次多项式平方根的积分, 确立第一、第二、第三类的标准形式, 研究其变换并编制数值表, 将这些工作汇成三卷《椭圆函数与欧拉积分论》. 书名中的“椭圆函数”沿用当时的称呼, 涵盖今天所说的椭圆积分.^a

阿贝尔在 1827 年的《椭圆函数研究》中承接勒让德的分类, 转而研究第一类积分的反函数, 并推导出实、虚两个方向的周期关系. 雅可比在 1829 年的《椭圆函数论新基础》中系统研究这些反函数, 并专节讨论“双周期原理”.^b

^aA.-M. Legendre, *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes*, 卷一, 第 V 章 §15, 第 18 页列出三类标准形式; 卷二; 卷三. 三卷扉页分别署 1825、1826、1828 年, 卷三所收补篇续至 1832 年; 见卷三第 359 页末的署名.

^bN. H. Abel, *Recherches sur les fonctions elliptiques*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 2 (1827), 101–181; 第 102 页明确将三类积分的命名归于勒让德, 随后讨论反演; 周期关系见第 109

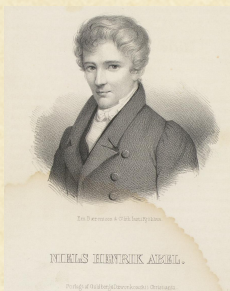
页公式 (20)–(22). C. G. J. Jacobi, *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, 1829, §17, 第 30 页; §19, 第 34–35 页.



勒让德(1752–1833)

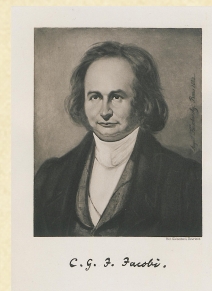
漫画肖像(局部)²

整理椭圆积分的标准形式、变换与数值表.



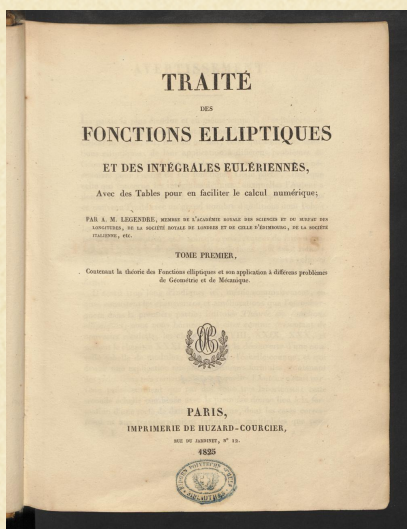
阿贝尔(1802–1829)³

以积分反演研究椭圆函数及其双周期、加法关系.

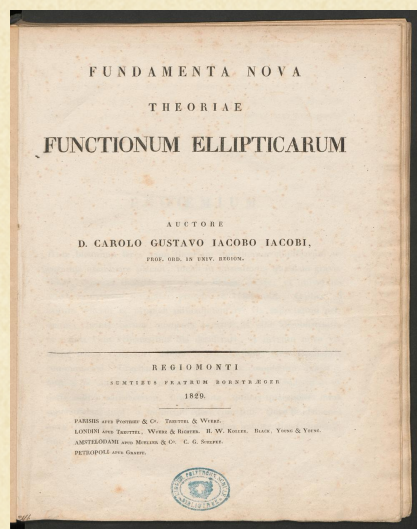


雅可比(1804–1851)⁴

发展椭圆函数理论, 系统论述双周期性性质.



勒让德, 第一卷扉页(署 1825 年).



雅可比,《椭圆函数论新基础》,1829 年.

图 6.4: 两书均为 ETH Zürich 馆藏公版扫描, 馆藏链接见史略注释.

为看清反演与代数曲线的联系, 令 $u = F(\varphi | \lambda)$, 并取 $x = \lambda \sin^2 \varphi$, 其中 $0 < \varphi < \pi/2$. 由链式法则,

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx/d\varphi}{du/d\varphi} = 2\lambda \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \lambda \sin^2 \varphi}.$$

记 $y = \frac{1}{2} dx/du$. 因为 $\lambda \cos^2 \varphi = \lambda - x$, 所以

$$y^2 = (\lambda \sin^2 \varphi)(\lambda \cos^2 \varphi)(1 - \lambda \sin^2 \varphi) = x(\lambda - x)(1 - x) = x(x - 1)(x - \lambda).$$

²Julien-Léopold Boilly 绘, 1820 年代, 确切年份未详; 法国学会图书馆藏, Ms 7749. 采用法国科学院 «La Lettre» 第 28 期(2011)第 4 页原画扫描的局部; 年代说明见该刊第 2 页.

³Em. Bærentzen & Co. 制作的石版肖像, 1853 年发表于《挪威名人肖像》第二卷; 挪威国家图书馆藏本.

⁴August Kaselowsky 1843 年作; 据 1904 年纪念传记中的复制品, 海德堡大学图书馆藏本.

于是 (x, y) 满足三次方程 $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, 且 $du = dx/(2y)$. 转到复变量后, 在曲线上 $y \neq 0$ 的点附近选定积分起点, $u = \int dx/(2y)$ 的导数不为零, 因而给出局部复坐标. 局部反演后, x, y 成为 u 的全纯函数. 要理解它们的双周期性质, 先看这条三次曲线的整体形状.

6.1.5 椭圆曲线的二叶分支覆盖与纤维

固定 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, 记 $P(x) = x(x-1)(x-\lambda)$. 曲面 $y^2 = P(x)$ 到 x -复平面的坐标投影为

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = P(x)\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto x.$$

若 $P(a) \neq 0$, 取以 a 为中心、不含 P 的零点的圆盘, 其中有两个互异的全纯分支 $y = \pm\sqrt{P(x)}$. 若 $a \in \{0, 1, \lambda\}$, 写 $P(x) = (x-a)Q(x)$, 其中 $Q(a) \neq 0$. 在 a 附近选取 Q 的全纯平方根, 并令 $w = y/\sqrt{Q(x)}$, 方程就成为 $x-a = w^2$. 因此, π 在 $(a, 0)$ 附近用坐标 w 表示为 $w \mapsto a + w^2$, 而 $a = 0, 1, \lambda$ 都是它的分支值.

还需检查无穷远. 对 $x \neq 0$, 取 $\xi = 1/x$, $\eta = y/x^2$, 方程变为

$$\eta^2 = \xi(1-\xi)(1-\lambda\xi).$$

补入 $(\xi, \eta) = (0, 0)$, 便补上了曲线的无穷远点. 坐标投影随之延拓到补全后的曲线与黎曼球面之间; 在无穷远坐标中, 它是 $(\xi, \eta) \mapsto \xi$. 右端在 $\xi = 0$ 有单根, 所以延拓后的 π 在此处也局部等价于平方映射. 它共有 $0, 1, \lambda, \infty$ 四个分支值; 除此以外, 每个点上恰好有两个点, 因此称为二叶分支覆盖 (two-sheeted branched covering). 这个补全后的曲线称为勒让德形式的椭圆曲线 (elliptic curve), 记为 E .

取 $0 < \lambda < 1$, 在两份球面上分别沿负实轴从 ∞ 到 0 的弧, 以及线段 $[\lambda, 1]$ 剪开. 每条切口都把一份的上岸接到另一份的下岸, 反之亦然. 每份剪开的球面是一个圆环; 将两份圆环的对应边界相接, 便得到环面.

回到积分 $u = \int dx/(2y)$. 固定起点, 沿两条路径到达曲面上的同一点, 积分值之差是沿相应闭路的积分, 称为周期 (period). 全局反演得到的亚纯函数具有这些周期.

定义 (椭圆函数). 设 f 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数. 若存在 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关, 且 $f(u + \omega_1) = f(u + \omega_2) = f(u)$, 则称 f 为椭圆函数 (elliptic function).

两周期生成加法子群 $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. 商空间 $\mathbb{C}/\Lambda$ 把相差 $m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) 的点视为同一点; 基本平行四边形的两组对边分别粘合, 也得到环面. 椭圆积分的反演将这个环面与曲线 E 联系起来.

定理 6.9 (椭圆积分的反演). 设 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, E 是上述勒让德形式的椭圆曲线. 存在两个实线性无关的复数 ω_1, ω_2 , 使 E 与 $\mathbb{C}/\Lambda$ 全纯同构, 其中 $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. 在 $y \neq 0$ 的局部坐标图中, 同构由积分 $u = \int dx/(2y)$ 的值模 Λ 表示; 改变积分起点只使 u 平移一个常数. 反演得到的坐标函数 $x(u), y(u)$ 是以 ω_1, ω_2 为周期的椭圆函数.⁵

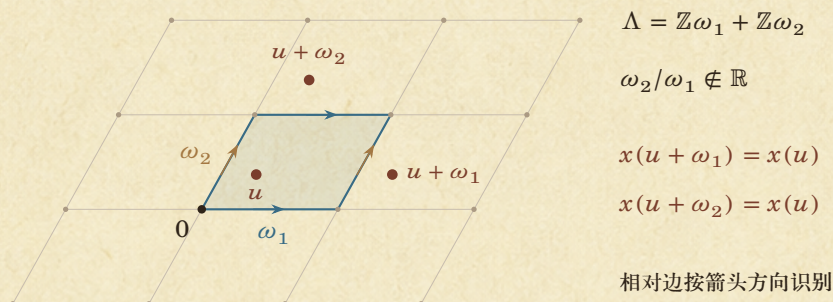


图 6.5: $x(u)$ 在相差 $m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) 的点处取相同的值; 粘合两组对边得到环面.

下图取 $\lambda = \frac{1}{2}$, 仍以 $(\operatorname{Re} x, \operatorname{Im} x, \operatorname{Re} y)$ 为三维坐标, 用颜色表示 $\operatorname{Im} y$. 红线标出实坐标的点; 右图表示补入无穷远点后得到的环面.

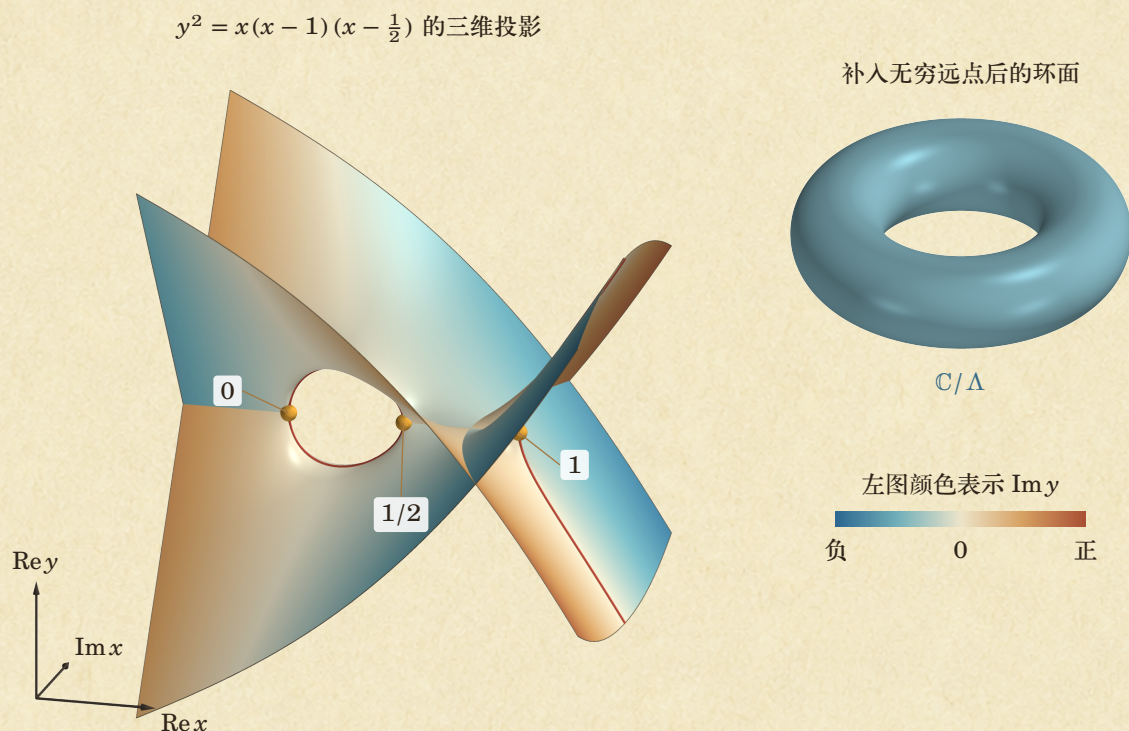


图 6.6: 左图按方程 $y^2 = x(x-1)(x-\frac{1}{2})$ 绘制, 三个金色圆点为 $(0, 0), (\frac{1}{2}, 0), (1, 0)$. 右图是 E 的环面模型.

⁵本讲引用这一解析定理. 关于复环面与椭圆曲线的对应, 见 A. V. Sutherland, *18.783 Elliptic Curves, Lecture 15*, 2023, 第 1 页关于复流形同构的说明及第 8 页 Corollary 15.12.

例 6.10. 设 k 为特征不为 2 的域, $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$, $P(x) = x(x-1)(x-\lambda)$, $B = k[x, y]/(y^2 - P(x))$. 对 k -代数同态 $k[t] \rightarrow B$, $t \mapsto x$, 沿 $t \mapsto a \in k$ 取张量积, 由引理 6.1 得

$$B \otimes_{k[t]} k \simeq k[y]/(y^2 - P(a)).$$

若 $a \in \{0, 1, \lambda\}$, 则 $P(a) = 0$, 令 $\epsilon = \bar{y}$, 所得环为 $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$. 若 $P(a) = b^2 \neq 0$, 则 $b, -b$ 互异, 由引理 6.2 得 $k[y]/(y^2 - P(a)) \simeq k \times k$. 若 $P(a)$ 不是平方, 则 $y^2 - P(a)$ 不可约, 商环是 k 的二次扩域.

在无穷远坐标图中令 $\xi = 0$, 同样得到 $k[\eta]/(\eta^2)$. 因此在复数域上, 四个分支值处的纤维的坐标环都同构于 $\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2)$, 其余点处则同构于 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

与这些纤维的坐标环相比, B 本身没有非零幂零元. 事实上, 若 $P(x) = (f(x)/g(x))^2$, 其中 $f, g \in k[x] \setminus \{0\}$, 则 $g(x)^2 P(x) = f(x)^2$ 两端的次数一奇一偶, 矛盾. 因此 $P(x)$ 不是 $k(x)$ 中的平方, $y^2 - P(x)$ 在 $k(x)[y]$ 中不可约. 多项式 $y^2 - P(x)$ 的 y^2 项系数为 1, 所以带余除法使 B 的每个元素唯一写成 $a(x) + b(x)y$, 其中 $a(x), b(x) \in k[x]$. 这也表明 B 嵌入域 $k(x)[y]/(y^2 - P(x))$, 从而是整环. 令 $x = a$ 后, 商环中却可能出现非零且平方为零的元素. 下一节用这种元素记录函数的一阶变化.

6.1.6 双数与点处的导子

以下用 k 表示域.

定义 6.11. 环 $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ 称为 k 的双数环 (ring of dual numbers); 仍以 ϵ 表示不定元在商环中的像. 每个元素唯一写成 $a + b\epsilon$, 其中 $a, b \in k$, 且乘法为

$$(a + b\epsilon)(c + d\epsilon) = ac + (ad + bc)\epsilon.$$

其取常数项同态为 $\rho: k[\epsilon]/(\epsilon^2) \rightarrow k$, $a + b\epsilon \mapsto a$.

前面在分支值处计算张量积, 得到了双数环. 若把它用作函数的取值环, 则 $\epsilon^2 = 0$ 使多项式代入只留下常数项与一次项: 对 $f \in k[T]$,

$$f(a + b\epsilon) = f(a) + bf'(a)\epsilon.$$

这是多项式展开的恒等式, 在任何特征下都成立.

例 6.12. 取 $A = k[t]$ 、 $B = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$, 考虑两个 k -代数同态 $\varphi_0, \varphi_1 : A \rightarrow B$, 分别令 $\varphi_0(t) = 0, \varphi_1(t) = \epsilon$. $\text{Spec } B$ 只有素理想 (ϵ) , 两同态都将它拉回到 (t) , 故它们诱导完全相同的连续映射 $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$. 沿 $A \rightarrow k, t \mapsto 0$ 作张量积, 分别得到

$$B \otimes_{A, \varphi_0} k \simeq B/(0) \simeq B, \quad B \otimes_{A, \varphi_1} k \simeq B/(\epsilon) \simeq k.$$

这两个环同态诱导同一个连续谱映射, 却给出不同的纤维坐标环.

设 B 为 k -代数. 一个 k -代数同态 $x : B \rightarrow k$ 表示一个取值在 k 中的点, 称为一个 k -有理点 (k -rational point), 并记 $x(b) = b(x)$. 若把取值环换为双数环, 考察满足 $\rho \circ h = x$ 的 k -代数同态 $h : B \rightarrow k[\epsilon]/(\epsilon^2)$, 它在常数项上仍是点 x , 而 ϵ 的系数记录每个函数的一阶变化. 下面计算保持乘法对这些系数提出什么要求.

定义 6.13. 设 B 为 k -代数, $x : B \rightarrow k$ 为 k -有理点. 一个 k -线性映射 $D : B \rightarrow k$ 若对任意 $b, c \in B$ 满足

$$D(bc) = b(x)D(c) + c(x)D(b),$$

就称为 B 在点 x 处的一个 k -导子 (k -derivation at x). 全体这样的导子记为 $\text{Der}_{k,x}(B, k)$.

这些导子按逐点加法与数乘构成 k -向量空间. 事实上, 若 D_1, D_2 满足所示乘法公式, $r, s \in k$, 将公式两边分别乘以 r, s 后相加, 便得到 $rD_1 + sD_2$ 的同一公式; 零映射也满足它. 下标 x 强调 B 在取值域 k 上的作用为 $b \cdot c = b(x)c$.

命题 6.14. 设 B 为 k -代数, $x : B \rightarrow k$ 为 k -有理点. 满足 $\rho \circ h = x$ 的 k -代数同态 $h : B \rightarrow k[\epsilon]/(\epsilon^2)$, 与点 x 处的导子一一对应, 对应公式为

$$h(b) = b(x) + D(b)\epsilon \quad (b \in B).$$

证明. 若 $\rho \circ h = x$, 则 $h(b)$ 的常数项为 $b(x)$, 故存在唯一的系数 $D(b)$ 使所示公式成立. 比较 $h(b+c) = h(b) + h(c)$ 与 $h(rb) = rh(b)$ 中的 ϵ 系数, 得 D 为 k -线性映射. 再由

$$h(b)h(c) = b(x)c(x) + (b(x)D(c) + c(x)D(b))\epsilon$$

与 $h(bc)$ 的系数相等, 得到莱布尼茨法则.

反之, 给定导子 D , 令 $h(b) = b(x) + D(b)\epsilon$. 线性性保证它保持加法, 莱布尼茨法则保证它保持乘法. 取 $b = c = 1$, 得到 $D(1) = 2D(1)$, 故 $D(1) = 0$; 于是 $D(r) = rD(1) = 0$, h 在 k 上是恒等映射. 因而 h 是 k -代数同态. 两个构造互逆. $\square$

这种同态可以理解为点 x 的一阶移动: 对每个函数, 指定它的初始值与一阶变化, 并要求这些指定与函数的加法、乘法一致.

6.1.7 一阶函数与余切空间

设 k 为域, B 为 k -代数, 并固定 k -有理点 $x: B \rightarrow k$. 令 $\mathfrak{m} = \ker x$. 由于 x 在 k 上是恒等映射, 它诱导同构 $B/\mathfrak{m} \simeq k$, 故 $\mathfrak{m}$ 是极大理想. $\mathfrak{m}$ 中的元素是在 x 处消失的函数, 而 $\mathfrak{m}^2$ 由这些函数两两相乘的有限和组成.

先说明商 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的向量空间结构. 在这个加法群上, 定义剩余域 $B/\mathfrak{m} \simeq k$ 的数乘

$$(b + \mathfrak{m})(u + \mathfrak{m}^2) = bu + \mathfrak{m}^2 \quad (b \in B, u \in \mathfrak{m}).$$

若将 b 换为 $b+r$ 、将 u 换为 $u+v$, 其中 $r \in \mathfrak{m}, v \in \mathfrak{m}^2$, 乘积的改变量为 $bv + ru + rv \in \mathfrak{m}^2$. 因此数乘不依赖代表元. 分配律、数乘结合律及单位元的作用都由 B 的环运算继承, 其数乘也与 B 原有的 k -数乘一致. 同一论证表明, 对任意环 B 的极大理想 $\mathfrak{m}$, 商 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 都是剩余域 $\kappa(\mathfrak{m}) = B/\mathfrak{m}$ 上的向量空间.

若 D 是点 x 处的导子, $f, g \in \mathfrak{m}$, 则 $D(fg) = f(x)D(g) + g(x)D(f) = 0$. 因此导子不区分 $\mathfrak{m}$ 中相差 $\mathfrak{m}^2$ 的两个函数. 这使商空间 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 自然出现: 它保留消失函数的一阶部分, 忽略两个消失因子的乘积.

命题 6.15. 设 B 为 k -代数, $x: B \rightarrow k$ 为 k -有理点, $\mathfrak{m} = \ker x$. 限制到 $\mathfrak{m}$ 诱导 k -线性同构

$$\mathrm{Der}_{k,x}(B, k) \simeq \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k), \quad D \mapsto (f + \mathfrak{m}^2 \mapsto D(f)).$$

证明. 导子消去 $\mathfrak{m}^2$, 所以所示映射有定义. 每个 $b \in B$ 唯一分解为 $b = b(x) + (b - b(x))$, 第二项属于 $\mathfrak{m}$. 又因 D 消去常数, $D(b) = D(b - b(x))$. 因此 D 在 $\mathfrak{m}$ 上的取值决定整个 D , 所示映射是单射.

给定 k -线性映射 $\ell: \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow k$, 定义

$$D_\ell(b) = \ell(b - b(x) + \mathfrak{m}^2).$$

这保持加法和 k -数乘. 为验证乘法公式, 令 $u = b - b(x), v = c - c(x)$, 则 $u, v \in \mathfrak{m}$, 且

$$bc - b(x)c(x) = b(x)v + c(x)u + uv.$$

模去 $\mathfrak{m}^2$ 后, uv 消失; 应用 ℓ 即得 $D_\ell(bc) = b(x)D_\ell(c) + c(x)D_\ell(b)$. 所以 D_ℓ 是导子. 对 $f \in \mathfrak{m}$ 有 $D_\ell(f) = \ell(f + \mathfrak{m}^2)$, 故 $\ell \mapsto D_\ell$ 是所示映射的逆. $\square$

定义 6.16. 设 B 为 k -代数, $x: B \rightarrow k$ 为 k -有理点, $\mathfrak{m} = \ker x$. 称 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 为 $\operatorname{Spec} B$ 在 x 处的余切空间(cotangent space), 记为 $T_x^*(\operatorname{Spec} B)$; 称它的 k -线性对偶为切空间(tangent space), 记为

$$T_x(\operatorname{Spec} B) = \operatorname{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k).$$

对 $f \in \mathfrak{m}$, 以 $[f]$ 表示它在 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 中的像.

由命题 6.15, 切向量等价于点 x 处的导子, 也等价于命题 6.14 中固定常数项的双数同态. 为什么是“余切”? 函数 b 的一阶部分是 $b - b(x) + \mathfrak{m}^2$; 给定一个切向量 D , 它在这个一阶部分上取值为 $D(b)$. 因此余切空间中的元素充当作用在切向量上的线性函数. 若 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 有限维, 便由有限维线性代数得到 $T_x^*(\operatorname{Spec} B) \simeq \operatorname{Hom}_k(T_x(\operatorname{Spec} B), k)$. 下面通过多项式展开, 把这一解释与熟悉的切线计算对应起来.

例 6.17. 设 $B = k[t_1, \dots, t_n]$, 点 x 是在 $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$ 处取值. 令 $u_i = t_i - a_i$, 则 $\mathfrak{m} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathfrak{m}^2$ 恰由 $u_1, \dots, u_n$ 的总次数至少为 2 的单项式的线性组合构成. 所以 $[u_1], \dots, [u_n]$ 是 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的一组基.

对多项式 $f \in B$, 视其余变量为常数, 关于 t_i 逐项求形式导数, 所得多项式记为 $\partial f / \partial t_i$. 展开 $f(a_1 + u_1, \dots, a_n + u_n)$ 后, 常数项为 $f(a)$, 一次项为 $\sum_{i=1}^n (\partial f / \partial t_i)(a) u_i$, 从而

$$f - f(a) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial t_i}(a) u_i \pmod{\mathfrak{m}^2}.$$

给定 $v = (v_1, \dots, v_n) \in k^n$, 令 $t_i \mapsto a_i + v_i \epsilon$, 便得到

$$f(a + v\epsilon) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial t_i}(a) v_i \epsilon.$$

对应的导子是方向导数 $D_v(f) = \sum_{i=1}^n (\partial f / \partial t_i)(a) v_i$. 于是切空间与 k^n 同构, 而余切空间的基 $[u_i]$ 分别取出切向量的第 i 个坐标.

命题 6.18. 设 $f_1, \dots, f_r \in k[t_1, \dots, t_n]$, $B = k[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$, 且 $a \in k^n$ 满足所有方程 $f_j(a) = 0$. 以 x 表示在 a 处取值的点, 仍以 t_i 表示变量在 B 中的像, 并令 $u_i = t_i - a_i$. 则 $T_x^*(\operatorname{Spec} B)$ 由 $[u_1], \dots, [u_n]$ 生成, 其全部线性关系由

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial t_i}(a) [u_i] = 0 \quad (1 \leq j \leq r)$$

生成. 通过 $\ell \mapsto (\ell([u_1]), \dots, \ell([u_n]))$, 切空间 $T_x(\operatorname{Spec} B)$ 与满足下列方程的向量 $v \in k^n$ 所成的子空间同构:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial t_i}(a) v_i = 0 \quad (1 \leq j \leq r).$$

证明. 记 $\mathfrak{m} = \ker x$, 并在多项式环中记 $\mathfrak{n} = (t_1 - a_1, \dots, t_n - a_n)$, $J = (f_1, \dots, f_r)$. 由于 $J \subseteq \mathfrak{n}$, 有 $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}/J$ 及 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq \mathfrak{n}/(\mathfrak{n}^2 + J)$. 例 6.17 给出每个 f_j 模 $\mathfrak{n}^2$ 的一次项. 对 $h \in k[t_1, \dots, t_n]$, 因 $f_j(a) = 0$, 有 $hf_j \equiv h(a)f_j \pmod{\mathfrak{n}^2}$. 因此 J 带来的全部线性关系正是陈述中的关系. 对这些关系取 k -线性对偶, 便得到切向量的方程. $\square$

例 6.19. 设 $\text{char } k \neq 2, \lambda \in k \setminus \{0, 1\}, P(x) = x(x-1)(x-\lambda)$, 并在曲线 $y^2 = P(x)$ 上取 k -有理点 (a, b) . 令 $u = x - a, v = y - b$. 由上一命题, 余切空间由 $[u], [v]$ 生成, 其关系由下式生成:

$$2b[v] - P'(a)[u] = 0.$$

若 $b \neq 0$, $[v]$ 可由 $[u]$ 表示, 故 $[u]$ 是余切空间的一组基. 若 $b = 0$, 则 $a \in \{0, 1, \lambda\}$, $P'(a) \neq 0$, 所以 $[u] = 0$, 而 $[v]$ 是一组基.

两种点处的切空间都只有一维; 区别在于第二种点处, 任意切向量均满足 $D(x) = 0$. 投影坐标 x 的一阶变化为零, 而曲线上仍有非零的切向量. 在复数域上, 前面构造的局部坐标满足 $x - a = w^2$. 因此 w 的一次变化投影后从二次项才开始出现; 令 $x = a$, 则剩下 $w^2 = 0$. 特殊纤维中的平方零元与投影的一阶变化, 在这里由同一个方程联系起来.

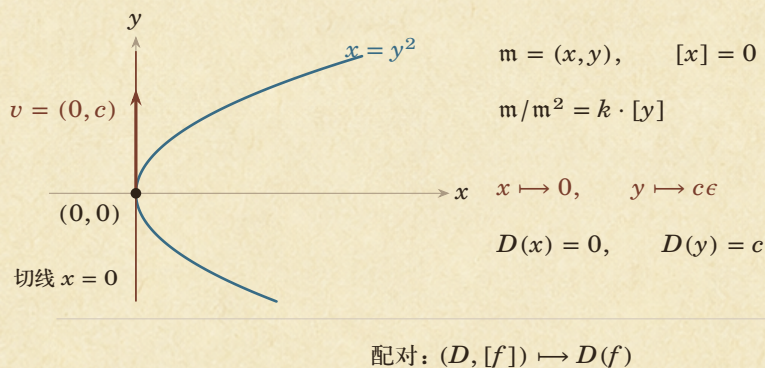


图 6.7: 抛物线 $x = y^2$ 在原点的情形: $[x] = 0$, $[y]$ 生成余切空间; 切向量由 $D(y)$ 决定, 并满足 $D(x) = 0$.

例 6.20. 对双数环 $B = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$, 唯一的 k -有理点是取常数项, 且 $\mathfrak{m} = (\epsilon)$, $\mathfrak{m}^2 = 0$. 于是余切空间为一维空间 $k\epsilon$; 一个导子由任意给定的 $D(\epsilon) \in k$ 确定. 这个谱虽然只有一个点, 却具有一维切空间. 双数环的一阶信息无法从其单点拓扑空间读出.

习题

- (1) 在 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 上用 $c \cdot (z \otimes w) = z \otimes (cw)$ ($c, z, w \in \mathbb{C}$) 定义复数数乘. 计算 $e_{\pm} = (1 \otimes 1 \pm i \otimes i)/2$ 在例 6.3 的同构下的像, 证明它们是非零、乘积为零且和为 1 的幂等元. 写出该同构的逆, 并求乘法映射 $z \otimes w \mapsto zw$ 的核.
- (2) 令 $\alpha = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$. 计算 $\mathbb{Q}(\alpha) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, 写出到实代数乘积的具体同构, 并解释沿包含环同态 $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ 再作标量扩张后为何得到三个因子.
- (3) 设 k 为代数闭域, 整数 $n \geq 2$ 满足 $\text{char } k \nmid n$. 对每个 $a \in k$, 考虑 k -代数同态 $k[t] \rightarrow k[s]$, $t \mapsto s^n$ 和 $k[t] \rightarrow k$, $t \mapsto a$. 计算 $k[s] \otimes_{k[t]} k$, 证明 $a \neq 0$ 时其谱有 n 个点, $a = 0$ 时只有一个点, 但这个张量积的 k -维数始终为 n .
- (4) 考虑包含环同态 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[i]$. 对 $p = 7, 13$, 计算 $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ 及其谱中各点的剩余域. 再沿包含同态 $\mathbb{F}_p \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ 扩张标量, 计算 $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{F}}_p$ 的分解; 这里 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 是 $\mathbb{F}_p$ 的代数闭包. 与 $p = 2$ 的相应结果比较, 说明坐标环的谱只有一个点时, 环中不必含非零幂零元.
- (5) 设 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, $P(x) = x(x-1)(x-\lambda)$. 对 $a = 0, 1, \lambda$, 分别写出 $P(x) = (x-a)Q_a(x)$ 中的 Q_a , 并计算 $Q_a(a)$. 在曲线 $y^2 = P(x)$ 上构造 $(a, 0)$ 附近的坐标 w , 使 $x-a = w^2$; 再在无穷远图 $\xi = 1/x$, $\eta = y/x^2$ 中构造 $(0, 0)$ 附近的坐标 w , 使 $\xi = w^2$. 说明在 x -复平面绕有限分支值一周时, 两个平方根怎样交换; 在 ξ -复平面绕 0 一周时又如何?

- (6) 设 k 为域, B 为 k -代数, $x : B \rightarrow k$ 为 k -有理点, $\mathfrak{m} = \ker x$. 在向量空间 $k \oplus (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ 上定义乘法 $(a, u)(c, v) = (ac, av + cu)$. 验证这使其成为以 $(1, 0)$ 为单位元的 k -代数, 再证明映射

$$B/\mathfrak{m}^2 \rightarrow k \oplus (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2), \quad b + \mathfrak{m}^2 \mapsto (b(x), b - b(x) + \mathfrak{m}^2)$$

是 k -代数同构. 解释这个同构怎样同时保留函数的值与一阶部分.

- (7) 设 k 为域, $n \geq 1$ 为整数, J 为 $k[t_1, \dots, t_n]$ 的理想. 令 $B = k[t_1, \dots, t_n]/J$, 并设 $a \in k^n$ 是 J 中所有多项式的公共零点. 给定 $v \in k^n$, 证明代入 $t_i \mapsto a_i + v_i \epsilon$ 能诱导 k -代数同态 $B \rightarrow k[\epsilon]/(\epsilon^2)$, 当且仅当 $\sum_{i=1}^n (\partial f / \partial t_i)(a) v_i = 0$ 对每个 $f \in J$ 成立.
- (8) 设 k 为域, 分别计算 $k[x, y]/(xy)$ 在原点和在点 $(1, 0)$ 处的切空间与余切空间. 若 $k = \mathbb{R}$, 画出实点与相应切空间, 并说明原点处的切空间为何不是两条坐标轴的并.
- (9) 设 k 为特征不为 2 的域, $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$, $B = k[x, y]/(y^2 - x(x-1)(x-\lambda))$. 对点 $(0, 0)$ 处的 k -导子 $D : B \rightarrow k$, 证明 $D(y)$ 可以任取而 $D(x) = 0$. 写出全部 k -代数同态 $h : B \rightarrow k[\epsilon]/(\epsilon^2)$, 使对每个 $f \in B$, $h(f)$ 的常数项均为 $f(0, 0)$. 证明这些同态都经由商环 $B/(x)$ 分解, 并解释这与 $x = 0$ 处纤维的一阶信息的关系.
- (10) 设 k 为特征 $p > 0$ 的代数闭域. 对每个 $a \in k$, 考虑 k -代数同态 $k[t] \rightarrow k[s]$, $t \mapsto s^p$ 和 $k[t] \rightarrow k$, $t \mapsto a$. 计算 $k[s] \otimes_{k[t]} k$, 并证明它同构于 $k[\epsilon]/(\epsilon^p)$. 对每个 $b \in k$ 及 $k[s]$ 在 $s = b$ 处的 k -导子 D , 证明 $D(s^p) = 0$, 并解释这表示投影坐标的一阶变化为零. 比较本题与第 3 题, 指出特征条件的作用.